

4. félévi beszámoló - 2018 tavasz

Lájer Márton Kálmán (lajerm@caesar.elte.hu)

Részecskefizika és csillagászat PhD program

Témavezetők:

Bajnok Zoltán, MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

Palla László, Eötvös Loránd Tudományegyetem

A dolgozat címe: **Nemperturbatív módszerek és végesméret-effektusok kvantumtérelméletekben**

1 Bevezetés

Az $\mathcal{N} = 4$ szuper-Yang-Mills modell 't Hooft (más néven planáris) határesetre bizonyos szempontból az elképzelhető legegyszerűbb kölcsönható nemabeli mértékelmélet, mely konform szimmetriával és integrálható struktúrával bír. A konform térelméleteket akkor tekintjük megoldottnak, ha sikerült meghatározni a korrelációs függvények építőköveit: a skáladimenziókat és a hárompont csatolásokat. Ezekből az összetevőkből az összes n -pont függvény ismert módon kifejezhető. A két összetevő közül az egyik már rendelkezésre áll az irodalomban: a kritikus exponenseket (skáladimenziókat) az integrálhatóság kihasználásával sikerült meghatározni. A hárompont-csatolás meghatározása azonban még nem megoldott.

Nemrég Bajnok és Janik [10] felvázoltak egy lehetséges útvonalat, ami elvezethet a szóban forgó vertex meghatározásához. Ennek megvalósításához az integrálható $1+1$ dimenziós térelméletek véges és végtelen térfogati formfaktorainak alapos megértésére van szükség. Az integrálhatóság a korábbiakban rendkívül erős segédeszköznek bizonyult a formfaktorok analitikus számításában, de lényeges feladat ezen eredmények numerikus alátámasztása is. A numerikus közelítések közt fontos szerepet játszanak a különféle csonkított tér módszerek.

A csonkított konform tér megközelítést eredetileg Yurov és Zamolodchikov fejlesztette ki a Lee-Yang konform modell releváns perturbációjának vizsgálatára [15]. A módszer ötlete, hogy a rendszert véges térfogatba helyezzük, ami általában diszkretizálja a Hamilton-operátor spektrumát. Ezután egy energialevágással véges dimenzióssá tesszük a Hilbert-teret, és ezen a csonkított bázison numerikusan diagonalizáljuk a Hamilton-operátor mátrixelemeit, hogy a térfogat függvényében közelítőleg megkapjuk a spektrumot. Ezzel lényegében a kvantummechanika jól ismert Rayleigh-Ritz variációs elvét alkalmazzuk, a perturbálatlan energiaszinteket tekintve bázisállapotoknak. A módszer segítségével az energiaszintek mellett a véges térfogati formfaktorok is közvetlenül számíthatók, a kapott eredmények pedig nemperturbatívak.

2 Az előző három félévben elért kutatási eredmények összegzése

MSC diplomamunkám keretében egy nem integrálható 1+1 dimenziós kvantumtérelmélet, a skalár ϕ^4 modell véges térfogatú spektrumának meghatározására készítettem egy THSA programot. A véges térfogati Hamilton-operátort a szabad tömeges Fock Hilbert-tér egy adott, véges dimenziós alterén diagonalizáltam, ezzel megkapva a közelítő sajátértékeket és sajátvektorokat. Ezután a nyers numerikus eredményeket a bázis dimenziószámának függvényében extrapoláltam, így növelve az eredmények pontosságát. [1]

A Doktori Iskolában első lépésként a már meglévő programot fejlesztettem tovább úgy, hogy az alkalmas legyen véges térfogati formfaktorok mérésére a ϕ^4 modell szimmetriasértő szektorában.

Következő lépésben a numerikus módszert implementáltam a legegyszerűbb integrálható kvantumtérelméletre: a sinh-Gordon modellre. Első megközelítésben a teljes $\cosh(g\phi)$ potenciált sorfejtettem g hatványai szerint, és ezt oldattam meg a THSA programmal, egyre magasabb hatványokat figyelembe véve. Második megközelítésben a Hamilton-operátort felbontottuk két, egymással kölcsönható alrendszerre. Az egyik alrendszer állapottere olyan vektorokból áll, amelyek csak a nullmódus gerjesztéseit tartalmazzák, a másik alrendszer pedig olyan Fock-vektorokat tartalmaz, amelyben a nullmódus nincs gerjesztve. (Ezt az ún. minimális Hilbert-tér módszert korábban a diplomamunkámban is alkalmaztuk.) Ezután a nullmódus problémáját előbb külön, nagy pontossággal megoldottuk, majd az ebből kapott numerikus sajátvektorokat használtuk a teljes bázis felépítéséhez, amin végül a teljes csonkolt Hamilton-operátort diagonalizáltuk. A fizikailag irreleváns nagy numerikus mátrixelemeket úgy küszöböltük ki, hogy a minimális térben megoldandó kvantummechanikai problémát behelyeztük egy végtelen falú, D hosszúságú derékszögű potenciálvölgybe, és a dobozba zárt szabad részecske sajátfüggvényeit használtuk bázisvektorokként a diagonalizáláshoz.

Ezután a hűrtérelméleti vertexet kezdtem el vizsgálni abban az esetben, ha a hurok világlepedőire a sinh-Gordon elméletet tesszük. Az SFT vertex egzaktul ismert, ha a világlepedőkön a szabad tömeges bozon modellje van [11]. A cél az, hogy a szabad elméletből kiindulva a csatolási állandó vezető rendjében meghatározzuk az SFT vertexet a dekompatifikált határesetben (exponenciális végesméret-korrekciók erejéig). Ezt a perturbatív formulát fel lehetne használni a függvényegyenletekből származó megoldás ellenőrzésére. A számítás elvégzéséhez először egy időfüggetlen perturbációs számításra alapuló módszert fejlesztettem ki, melynek alkalmazásához a sinh-Gordon modell formfaktorainak perturbatív számításában gyűjtöttem tapasztalatot.

Először a

$$\langle 0 | : \phi^2(0,0) : | p_1, p_2 \rangle$$

véges térfogati formfaktor vezető rendű perturbatív kifejtését végeztem el a sinh-Gordon modellben. A végtelen térfogati aszimptotika ellenőrzése után a polinomiális végesméret-korrekciókat vettem össze Pozsgay és Takács [12] polinomiális korrekciókra vonatkozó egzakt jóslatának perturbatív kifejtésével, és teljes egyezést találtam.

Ezt követően bekapcsolódtam kutatócsoportunk nem-diagonális formfaktorok Lüscher-korrekcióival kapcsolatos kutatásába. Csoportunk kidolgozott egy módszert, amely egyszerre teszi lehetővé a gerjesztett állapotok energiáinak és a nemdiagonális formfaktorok Lüscher-korrekcióinak közvetlen számítását integrálható kvantumtérelméletekben. Az ötlet az, hogy első lépésben az euklideszi kétpontfüggvényt számítjuk ki a tóruszon, abban a határesetben, amikor az egyik sugár mérete végtelenhez tart. Ez a mennyiség egyszerre kapcsolható össze a véges hőmérsékletű és a véges térfogati kétpontfüggvénnyel, melynek pólusaiból és azok reziduumaiból leolvashatók a véges térfogati energiaszintek és formfaktorok. A módszer segítségével kiszámítottuk egy lokális operátor egyrészecske formfaktorát azon integrálható elméletekre, amelyek csak egyetlen tömeges ger-

jesztést tartalmaznak. Ezután az eredményt a sinh-Gordon modell mezőoperátorának formfaktorán teszteltük, összevetve azt a perturbációs számítással kapott eredménnyel. A meghatározandó mennyiség ezúttal a

$$\langle 0 | \phi(0,0) | p \rangle$$

formfaktor volt. A másodrendű perturbatív számolás jóval hosszabbnak bizonyult, eredményként pedig bonyolultabb dupla szummák jelentek meg. A Lüscher-korrekciók kinyeréséhez szükség volt további tapasztalatok gyűjtésére. Ezért szintén kiszámoltam az álló részecske másodrendű tömegkorrekcióját véges térfogatban. Ez a mennyiség sinh-Gordon elméletben függetlenül kiszámítható a termodinamikai Bethe Ansatz segítségével [13,14]. Az álló részecske tömegkorrekciójának időfüggetlen perturbációs számításos kezelésénél a formfaktornál látottakhoz hasonló dupla szumma jelenik meg. Ezt a dupla szummát sikerült felírni egyszeres integrálok és explicit függvények összegeként, és az eredmény teljes egészében megegyezik a csoportunkban párhuzamosan, ettől független módszerrel kiszámolt perturbatív eredménnyel. A formfaktoros szumma Lüscher-korrekcióinak kinyerésekor ehhez képest további nehézségek adódtak, míg hosszas számolás árán végül sikerült kinyerni az első Lüscher korrekció explicit alakját. A formfaktorra vonatkozó végeredmény szintén teljesen megegyezik a csoportunkban más módszerrel számolt Lüscher-korrekció perturbatív kifejtésével. [2]

Ennek végeztével röviden visszatértem a Neumann-koefficiensek perturbatív számításának problémájához. A tavalyi első megközelítéshez képest tovább jutottam, de továbbra is problémát jelent, hogy olyan többszörös szummák jelennek meg a számításban, melyek az összegzési változók értékeinek különböző tartományaiban különböző alakú tagokat összegeznek fel. Ezért egyszerűbben számítható speciális eseteket kerestem. Egy ilyen könnyebben kezelhető eset, amikor két “nulla impulzusú” részecskét helyezünk el az egyik híron. Ez egyből maga után vonta a kérdést, mi történik azokkal a véges térfogati Fock-állapotokkal a sinh-Gordon kölcsönhatás bekapcsolása után, melyek a szabad tömeges elméletben több azonos impulzusú részecskét írnak le. A perturbációs számításal való összevetés alapján kiderült, hogy az ezekhez az állapotokhoz tartozó energiaszintek nulla kvantálási számok beírásával kaphatók meg az aszimptotikus Bethe-ansatz egyenletekből. Ez nem teljesen magától értetődő, hiszen a kölcsönható részecskék fermionként viselkednek. A paradoxon feloldása az, hogy bár a Bethe-Yang egyenletekbe nulla kvantálási számokat írunk be, a részecskék impulzusai b nagyságrendű korrekciókat kapnak, így valójában ezek az állapotok sem azonos kvantumállapotban levő részecskéket írnak le. Érdekeség, hogy kiderült, a Fock-állapotok degenerált impulzusú részecskéinek első impulzuskorrekciója a Hermite-polinomok gyökhelyeivel arányos.

3 Aktuális félévben végzett kutatási tevékenység

A félév során elsősorban az ÚNKP program keretében vállalt feladataimmal foglalkoztam. Maga az ÚNKP keretében végzett kutatás nem lehet tézispont, és az ebből írandó cikk sem számít bele a fokozat megszerzéséhez szükséges publikációk számába. Ez azonban nem akadályozta meg, hogy a pályázati munkában készülő numerikus C++ keretrendszer olyan általánosan írjam meg, hogy az gyorsabbá tegye más, az ÚNKP-hoz nem kapcsolódó TCSA modellek megoldását is. Az algoritmusgyűjtemény segítségével egyrészt viszonylag rövid idő alatt lehet összeállítani olyan kódokat, melyek hatékonyan kihasználják többszörös direkt szorzat Hilbert-tereken ható Hamilton-operátorok diszkrét szimmetriáit. Másrészt a segítségével hatékonyan írható TCSA kód is, ahol a perturbáló operátornak csak a holomorf és antiholomorf Verma-modulok bizonyos kombinációi között vannak

nemnulla mátrixelemei. A tavaszi félév folyamán egy olyan C++ kódot írtam, ami (a struktúraállandók ismeretében) egy tetszőleges diagonális konform minimál modell spektrumát határozza meg. Ezt az algoritmust az Ising modellen próbáltam ki, melyre a várakozásoknak megfelelően működött. A tervek szerint a legegyszerűbb többskálás integrálható modellt, a homogén sine-Gordon modellt szeretném mérni vele, melynek egzakt csatolás-tömeg relációját nemrég találták meg [3]. A modell tekinthető egy Ising modell és egy trikritikus Ising modell összecsatolásának. Ezeket még össze kell csatolni, és a numerikát meg is tervezzük javítani a numerikus renormálási csoport valamely változatával.

4 Oktatási tevékenység

szemeszter	gyakorlat	óraszám
2016-2017-1	Kvantummechanika A	1x2
2016-2017-1	Elektromágnesség 2	2x1
2017-2018-1	Kvantummechanika A	1x2
2017-2018-2	Elektromágnesség 2	1x2

5 Előadások, posztterek, nemzetközi iskolák

Előadások:

Esemény	Időpont	Helyszín	előadás címe
Swiss-Hungarian Workshop on Science Before the PhD	2016. november 4.	EPFL Lausanne, CH	Truncated Hilbert Space Approach for the 1+1D φ^4 theory
Young Researchers Integrability School and Workshop 2017	2017. március 3.	TC Dublin, IRL	Truncated Hilbert space approach to the 2d φ^4 theory
ELFT szeminárium	2018. április 11.	ELTE, Budapest, H	Lüscher corrections for non-diagonal form factors in integrable QFTs
ÚNKP konferencia	2018. május 24.	ELTE, Budapest, H	A csonkított Hilbert-tér módszer alkalmazása alacsony dimenziós kvantumtérelméletekre
DOFFI konferencia	2018. június 14-17.	B.fenyves, H	Csonkított Hilbert-tér módszer alacsony dimenziós kvantumtérelméletekre

Poszter:

Esemény	Időpont	Helyszín	poszter címe
Young Researchers Integrability School and Workshop 2017	2018. január 7.	Ascona, CH	Lüscher corrections for non-diagonal form factors in integrable QFTs

További iskola részvételek:

Esemény	Időpont	Helyszín
Spring School on Superstring Theory and Related Topics	2017. március 16-24.	ICTP, Trieste, I
AdS3: Theory and practice	2017. március 27-31.	GGI, Florence, I
Integrability in Atomic and Condensed Matter Physics	2018. júl.30-aug.24.	Les Houches, F

A tervek szerint a jövő évben részt veszek az I GST 2019 konferencián (Nordita, Stockholm).

6 Publikációk

Bajnok Zoltán témavezetőmmel az MSC témából írt cikkünk a jHEP folyóiratban: [1].

Nemdiagonális formfaktorok Lüscher-korrekcóiát tárgyaló cikkünk elbírálás alatt áll a jHEP folyóiratban: [2]

Két további cikk az előkészületek stádiumában van:

Z. Bajnok, M. L., Truncated Space Approach to the sinh-Gordon model and measurement of form factors (előkészületben)

M. L., TSA analysis of the Massive Schwinger model (ÚNKP) (előkészületben)

Egy további téma, amiben a közeljövőben publikálni szeretnénk:

Z. Bajnok, M. L., TCSA to the homogeneous Sine-gordon model (tervben)

A Függelék. Az ÚNKP eredmények összefoglalása

Egy igen érdekes és sokat vizsgált játékmodell a kétdimenziós kvantumelektrodinamika, a Schwinger-modell [4]. Ezt a modellt egy töltött Dirac-fermion (a „kvark”) és egy $U(1)$ mértékmező kölcsönhatásaként foghatjuk fel. A modell kétdimenziós voltából egy sor egyszerűsödés következik, melyek megkönnyítik a rendszer vizsgálatát. Először is, végtelen térfogaton a mértékszabadság következtében a mértéktér teljesen kitranszformálható, nem tartalmaz fizikai szabadsági fokot. Másodsor, két dimenzióban nincs spin: a bozonok és fermionok csak a mezők által kielégített kommutátor- vagy antikommutátor-relációkban különböznek egymástól. Ezen túlmenően nulla tömegű kvark esetén a Schwinger-modell egzaktul ráképezhető a tömeges szabad bozon kvantumtérelméletére. Véges térfogatban a tömegtelen Schwinger-modell továbbra is ráképezhető a tömeges szabad bozonra, azonban ezúttal nem transzformálható ki maradéktalanul a mértéktér: marad egyetlen kvantummechanikai szabadsági fok, amely a bozonizáció után a tömeges bozon nullmódusának szerepét tölti be [6]. A mérték szabadsági fok kvantálása után az elektromos térerősség operátora egy szabad valós paraméter, az ún. θ -paraméter erejéig meghatározott, amely fizikailag egy konstans külső elektromos térnek felel meg. A fermionikus tömegtag a bozonikus nyelven szintén egy lokális operátor térfogati integráljaként írható fel, ez az operátor azonban már a bozonmező koszinuszával arányos. A θ -paraméter hatása, hogy eltolja a tömegparabolát és ezt a koszinuszos potenciált egymáshoz képest [5]. A tömeges Schwinger-modell tehát egy két fizikai paramétert tartalmazó, kölcsönható, nem integrálható elmélet.

A THSA módszer lehetőséget ad a modell nemperturbatív vizsgálatára. Munkám során Stuart [7] tömegtelen esetre felírt pozitív definit fermionikus Hamilton-operátorából indultam ki. Ehhez perturbációként adtam hozzá a fermion tömegtagot, feltételezve, hogy a fizikai Hilbert-tér megegyezik a tömegtelen esetével. Kiderült, hogy a térfogat függvényében konstans fermiontömeg a bozonikus oldalon megfelel a Hamilton-operátor nem normálrendezett együtthatói állandó értéken tartásának. Ezt felhasználva készítettem el a THSA szimulációt, melynek segítségével a fermiontömeg és a θ paraméter függvényében kimértem a két legalacsonyabb tömegű kötött állapotot.

$\theta = \pi$ -ben a B1 tömeg esetén a numerikus pontosság kb összemérhető a DMRG-vel nyert irodalmi adatokkal [9], de a kritikus pont felé haladva egyre nehezebb mérni. $\theta = 0$ -ban a DMRG pillanatnyilag 2-3 hasznos jeggyel megelőzi pontosságban a THSA-t. Remélhetőleg ezen lehet még javítani. A θ -függés vizsgálatánál kis fermiontömegekre szépen illeszkednek a mérési pontok

a tömeg-perturbációszámítás másodrendjéig számolt irodalmi analitikus vonalakra [8]. Nagyobb fermiontömegre mutatkozik némi eltérés, de nem nyilvánvaló, hogy ez a perturbatív sorfejtés korlátait, vagy a numerika pontatlanságát jelzi. Miután kis fermiontömegekre meggyőzően illeszkedett a B1 tömeg, megpróbáltam átvenni a korábbi, ϕ^4 modellel kapcsolatos cikkünkben tárgyalt módszert a B2 tömeg meghatározására (a BY egyenlet analitikus elfolytatása és ennek illesztése az adatokra) [1]. Ezt véghez is vittem a fermiontömeg kis értékeire. Mivel maga az effektus (a B2 tömeg eltérése a B1 tömeg kétszeresétől) szintén kicsi, a relatív hibák itt már nagyobbak adódtak. Nagyobb fermiontömegeknél sajnos még nem ad meggyőző eredményeket a program.

A minimális Hilbert-teres program alkalmazásával a $\theta = \pi$ vonalon sikerült eljutnom a szimmetriasértő szektorba, és a gyakorlat azt mutatja, hogy értelmes eredményeket ad (pl. látszik a vákuumfelhasadás), de a kinktömeget még nem tudom kellő pontossággal mérni vele. Ezen a vonalon egyébként kb. a zérómódus kvantummechanika spektrumához konvergálnak a vonalak (ez a paraméterter más pontjaiban nincs így.)

A publikáláshoz hátravan még a THSA eredmények numerikus megjavítása, továbbá tervezünk egy fermion oldali THSA vizsgálatot is, melynek segítségével a modellt a nagy fermiontömegek tartományában lenne hatékonyan vizsgálható.

References

- [1] Z. Bajnok and M. Lájér, “Truncated Hilbert space approach to the 2d ϕ^4 theory”, JHEP 1610 (2016) 050 [arXiv:1512.06901]
- [2] Z. Bajnok, J. Balog, M. Lájér, C. Wu, “Field theoretical derivation of Lüscher’s formula and calculation of finite volume form factors”, [arXiv:1802.04021]
- [3] Z. Bajnok, J. Balog, K. Ito. et al., “On the mass-coupling relation of multi-scale quantum integrable models”, J. High Energ. Phys. (2016) 2016: 71.
- [4] J. Schwinger, “Gauge Invariance and Mass. II”, Phys. Rev. 128 (1962), 2425
- [5] S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind, “Charge Shielding and Quark Confinement in the Massive Schwinger Model”, Annals of Physics 93, 267-275 (1975)
- [6] N. S. Manton, “The Schwinger Model and its Axial Anomaly”, Annals of Physics 159, 220-251 (1985)
- [7] D. Stuart, “The Schwinger model on S^1 : Hamiltonian formulation, vacuum and anomaly”, Lett Math Phys (2014) 104: 1469
- [8] C. Adam, “Massive Schwinger Model within Mass Perturbation Theory”, Annals of Physics 259, 1-63 (1997)
- [9] T. Byrnes, P. Sriganesh, R.J. Bursill, C.J. Hamer, “Density Matrix Renormalisation Group Approach to the Massive Schwinger Model”, Phys.Rev. D66 (2002) 013002
- [10] Z. Bajnok, R. Janik, “*String field theory vertex from integrability*”, JHEP 1504 (2015) 042 [arXiv:1501.04533]

- [11] Y. H. He, J. H. Schwarz, M. Spradlin and A. Volovich, “*Explicit formulas for Neumann coefficients in the plane wave geometry*,” Phys. Rev. D 67 (2003) 086005 [hep-th/0211198]; J. Lucietti, S. Schafer-Nameki and A. Sinha, “*On the plane wave cubic vertex*”, Phys. Rev. D 70 (2004) 026005 [hep-th/0402185].
- [12] B. Pozsgay, G. Takács, “*Form factors in finite volume I: form factor bootstrap and truncated conformal space*”, Nucl.Phys.B788:167-208,2008 [arXiv:0706.1445]
- [13] Al. B. Zamolodchikov, “*On the Thermodynamic Bethe Ansatz Equation in Sinh-Gordon Model*”, J.Phys. A39 (2006) 12863-12887 [arXiv:hep-th/0005181]
- [14] J. Teschner, “*On the spectrum of the Sinh-Gordon model in finite volume*”, Nucl.Phys.B799:403-429,2008 [arXiv:hep-th/0702214]
- [15] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov. “*Truncated conformal space approach to the scaling Lee-Yang model*“, Int. J. Mod. Phys., A5:3221-3246, 1990.