Féléves beszámoló - 2016 ősz

Lájer Márton Kálmán

PhD I.

Témavezetők:

Bajnok Zoltán, MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

Palla László, Eötvös Loránd Tudományegyetem

1 Kutatási tevékenység

A modern fizika egyik kulcsfontosságú aktuális problémája az erősen kölcsönható kvantumtérelméletek megértése. A nehézion-ütközések, a kvarkbezárás vagy a magas hőmérsékletű szupravezetés leírásához szükséges kvantumtérelméletek közös tulajdonsága, hogy azok a fenti jelenségek vizsgálata szempontjából érdekes paraméter-tartományban nem tekinthetők valamilyen szabad modellek kis perturbációinak, ez a tény pedig gátat szab a perturbatív módszerek alkalmazásának. A kérdéskör analitikus vizsgálatában a holografikus elv megsejtése nyitott új távlatokat [1], melynek értelmében görbült háttéren definiált húrelméletek ekvivalensek a téridő határfelületén értelmezett kvantumtérelméletekkel. Ez a kapcsolat duális abban az értelemben, hogy a kvantumos húrelméletnek gyengén csatolt mértékelmélet, míg az erősen csatolt mértékelméletnek klasszikus húrelmélet felel meg. Az igazi áttörést Maldacena cikke [2] jelentette, melyben konkrét példát mutat a dualitásra. Maldacena-nak sikerült megfeleltetnie az $AdS_5 \times S^5$ háttéren felírt, IIB típusú húrelméletet az AdS_5 felület négydimenziós peremén élő $\mathcal{N} = 4$ szuper-Yang-Mills, maximálisan szuperszimmetrikus, nemabeli mértékelmélet ún. 't Hooft határesetének, és megsejtette, hogy a dualitás véges számú szín esetére is kiterjeszthető.

Az $\mathcal{N} = 4$ szuper-Yang-Mills modell 't Hooft (más néven planáris) határesete bizonyos szepontból az elképzelhető legegyszerűbb kölcsönható nemabeli mértékelmélet. Nem sokkal a holografikus kapcsolat felfedezése után különféle integrálható struktúrákat vettek észre a modellben. Ennek következtében több, mint egy évtizede kiterjedt tudományos közösség foglalkozik a térelmélet integrálható vonatkozásaival [3]. Az eddigi vizsgálatok alapján minden jel arra utal, hogy az $\mathcal{N} = 4$ SYM teljesen integrálható a 't Hooft limeszben. Más szavakkal: jó esély van rá, hogy kölcsönható nemabeli mértékelmélet létére analitikusan megoldható, és ez a lehetőség a maga nemében egyedülállóvá teszi. Ez a tény ellensúlyozza azt a szépséghibát, hogy nem ismerünk olyan rendszert a Természetben, amit maga az $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills modell ténylegesen leírna.

A fent említett mértékelmélet alapvetően egy konform kvantumtérelmélet. A konform térelméleteket akkor tekintjük megoldottnak, ha sikerült meghatároznunk a korrelációs függvények építőköveit: a skáladimenziókat és a hárompont csatolásokat. Ezekből az összetevőkből az összes n-pont függvény ismert módon kifejezhető. A két összetevő közül az egyik már rendelkezésre áll: a kritikus exponenseket (skáladimenziókat) az integrálhatóság kihasználásával sikerült meghatározni.

Feladat tehát a hárompont-csatolások meghatározása. Ezek a mennyiségek a húrelméleti oldalon olyan folyamatok amplitúdóival állnak kapcsolatban, amelyekben egy nagyobb húr két kisebbre szakad, ezzel egzaktul leírva a húrok kölcsönhatását (húrtérelméleti – SFT – vertex). Képzeljünk el egy L_1 kerületű húrt a téridőben, ami egy adott pillanatban két kisebb, L_2 és L_3 kerületű húrra bomlik szét ($L_1 = L_2 + L_3$). A húrok kvantumos viselkedését a világlepedőjükön definiált 1+1 dimenziós, integrálható kvantumtérelméletekkel írhatjuk le. Az SFT-vertex a szokványos kvantumtérelméleti S-mátrixhoz hasonló szerepet tölt be abban az értelemben, hogy ha $t \to -\infty$-ben a világlepedőn értelmezett kvantumtérelmélet a $\left\{p_i^{(1)}\right\}$ impulzusú részecskéket tartalmazó állapotban volt, akkor az

$$\mathbf{N}^{1|2;3}_{L_1|L_2;L_3}\left(\left\{p_i^{(1)}\right\} \mid \left\{p_j^{(2)}\right\};\left\{p_k^{(3)}\right\}\right)$$

SFT-vertex adja meg az átmeneti amplitúdót abba az állapotba, amelyben $t \to \infty$-ben az L_2 kerületű húron $\left\{p_j^{(2)}\right\}$ impulzusú részecskék, az L_3 kerületű húron pedig a $\left\{p_k^{(3)}\right\}$ impulzusú részecskék vannak. a Az SFT vertex meghatározását az is motiválja, hogy kiszámítása kulcsfontosságú a húrelmélet kvantálásához, melyet eddig csak sík háttéren sikerült megtenni.

Nemrég Bajnok és Janik[4] felvázoltak egy lehetséges útvonalat, ami elvezethet a szóban forgó vertex meghatározásához. Első lépésben érdemes az L_1 és L_2 (vagy az L_1 és L_3) kerületű húrok világlepetőjét "bemetszeni", a kerületükkel pedig eltartani végtelenbe, miközben a harmadik kimenő húr kerülete (melyet most L-el jelölünk) véges marad. Ebben az ún. dekompaktifikált limeszben, ha elhanyagoljuk az exponenciálisan kicsi térfogatfüggő korrekciókat, az SFT vertexre olyan függvényegyenletek adódnak, melyek alakja megegyezik az integrálható 1+1 dimenziós modellekben felírt formfaktor-egyenletekkel. Második lépésben a dekompaktifikált limeszbeli mennyiségekből (exponenciális korrekciók erejéig) vissza lehet kapni a véges térfogatú (kerületű) SFT vertexet, és valószínű, hogy az exponenciális korrekciókra vonatkozó információt is tartalmazza valamilyen formában.

A két lépés implementálása nem egyszerű, az integrálható 1+1 dimenziós térelméletek véges és végtelen térfogati formfaktorainak alapos megértésére van szükség.

MSC diplomamunkám keretében egy nem integrálható 1+1 dimenziós kvantumtérelmélet, a skalár ϕ^4 modell véges térfogatú spektrumának meghatározására készítettem egy programot. A numerikus módszer a Rayleigh-Ritz-féle variációs elven alapult: a véges térfogati Hamilton-operátort a Hilbert-tér egy adott, véges dimenziós alterén diagonalizáltam, ezzel megkapva a közelítő sajátértékeket és sajátvektorokat. Ezután a nyers numerikus eredményeket a bázis dimenziószámának függvényében extrapoláltam, így növelve az eredmények pontosságát.

A Doktori Iskolában első lépésként a már meglévő programot fejlesztettem tovább úgy, hogy az alkalmas legyen véges térfogati formfaktorok mérésére a ϕ^4 modell szimmetriasértő szektorában. A szemiklasszikus határesetben (amikor a negyedrendű csatolás kicsi, így a kinktömeg nagy), az egykink-állapotok közötti

$$\langle k_1 \left| \phi\left(0,0\right) \right| k_2 \rangle$$

formfaktort nagy térfogatoknál össze lehet hasonlítani a végtelen térfogatú mennyiséget meghatározó, közismert Goldstone-Jackiw formulával. A numerikus formfaktorok értéke kis térfogaton lényegesen eltér a szemiklasszikustól (különösen, ha mindkét kink mozog), aztán egy köztes tartományon, kb. $mL = 10$ és $mL = 15$ között (ahol m a bázisnegeráláshoz használt szabad bozon tömege) jól simulnak egymásra, nagyobb térfogaton pedig a levágási hibák miatt elromlik a numerika. Nagy térfogatokon azonban úgy tűnik, a bázisméret növelésével konvergálnak az adatok a szemiklasszika felé. Következő logikai lépésként megpróbáltam a spektrum meghatározásánál bevált függvényalakkal extrapolálni az adatokat. Az illesztés eredménye összességében nem volt teljesen meggyőző, a numerikus eredmények pontosításához további módszerek kidolgozása szükséges.

Következő lépésként a numerikus módszert implementáltam a legegyszerűbb integrálható kvantumtérelméletre: a sinh-Gordon modellre. Ezt a modellt a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{g^2}\cosh\left(g\phi\right)$$

Lagrange-sűrűség írja le. Első megközelítésben a $\cosh\left(g\phi\right)$ potenciált sorfejtettem g hatványai szerint, majd a kvantálásnál a normálrendezést a végtelen térfogatbeli, m tömegű szabad bozon léptető operátoraira róttam ki. A módszer kis g értékekre ($g \leq 0.05$) működik, erősebb csatolásnál azonban lényeges problémát jelent, hogy a perturbáló operátor mátrixelemei a magas betöltési számú Fock állapotok között igen nagyok, ami a sajátérték-kereső rutin numerikus pontosságának gyors romlásához vezet. Mivel tipikusan a nulla impulzusú részecskék betöltési száma a legmagasabb a Fock-bázis vektoraiban, ezért a problémát a következőképp orvosoltuk. A Hamilton-operátort felbontottuk két, egymással kölcsönható alrendszerre. Az egyik alrendszer állapottere olyan vektorokból áll, amelyek csak a nullmódus gerjesztéseit tartalmazzák, a másik alrendszer pedig olyan Fock-vektorokat tartalmaz, amelyben a nullmódus nincs gerjesztve. (Ezt az ún. minimális Hilbert-tér módszert korábban a diplomamunkámban is alkalmaztuk.) Ezután a nullmódus problémáját előbb külön, nagy pontossággal megoldottuk, majd az ebből kapott numerikus sajátvektorokat használtuk a teljes bázis felépítéséhez, amin végül a teljes csonkolt Hamilton-operátort diagonalizáltuk. A fizikailag irreleváns nagy numerikus mátrixelemeket úgy küszöböltük ki, hogy a minimális térben megoldandó kvantummechanikai problémát belehelyeztük egy végtelen falú, D hosszúságú derékszögű potenciálvölgybe, és a dobozba zárt szabad részecske sajátfüggvényeit használtuk bázisvektorokként a diagonalizáláshoz.

A Sinh-Gordon modell véges térfogatú alapállapoti energiája a termodinamikai Bethe Ansatz segítségével közvetlenül kiszámítható[5]. Ehhez egy nemlineáris integrálegyenletet kell numerikusan megoldani, amelyet Mathematicaban, Fast Fourier transzformáció segítségével implementáltam. Azonban kiderült, hogy az "egzakt" alapállapoti energia értéke a csatolási állandó széles tartományában annyira közel áll a szabad tömeges bozon véges térfogatú alapállapoti energiájához, hogy az eltérésük összemérhető a numerikus sajátértékek hibájával. Érdemes megjegyezni, hogy a sinh-Gordon modell formfaktorai a perturbációszámítás első rendjében megegyeznek a ϕ^4 modell formfaktoraival a szimmetrikus szektorban. Az ennél jelentősen pontosabb numerikus adatokhoz a program további fejlesztése szükséges.

A félév hátralevő részében a húrtérelméleti vertexet kezdtem el vizsgálni abban az esetben, ha a húrok világlepedőire a sinh-Gordon elméletet tesszük. Az SFT vertex egzaktul ismert, ha a világlepedőkön a szabad tömeges bozon modellje van[6]. A cél most az, hogy a szabad elméletből kiindulva a csatolási állandó vezető rendjében meghatározzuk az SFT vertexet a dekompaktifikált határesetben (exponenciális végesméret-korrekciók erejéig). Ezt a perturbatív formulát fel lehetne használni a függvényegyenletekből származó megoldás ellenőrzésére. A számítás elvégzéséhez először a sinh-Gordon modell

$$ {}_{\text{in}}\left\langle 0 \left| \phi^2 (0,0) \right| p_1, p_2 \right\rangle_{\text{out}} $$

formfaktorainak perturbatív számításában gyűjtöttem tapasztalatot. A perturbatív sor első tagjainak meghatározására több mód is kínálkozik: felhasználhatjuk a formfaktor-egyenletekből kapott egzakt eredményt (miután megfeleltettük a kérdéses operátornak), használhatjuk a kovariáns perturbációszámítást, vagy a "régimódi" perturbációszámítást használva sorfejthetjük az in és out állapotokat (ez utóbbihoz a Lippman-Schwinger egyenletre van szükség). Maga a vertex perturbatív vezető rendje az utóbbi módszerrel támadható meg. Már a vezető rendben meglehetősen bonyolult hármas integrálok jelennek meg, amelyek megnehezítik a kérdéses mennyiség analitikus meghatározását.

A közeljövőben az eddig megkezdett feladatok továbbgondolásán túl legfőképp a húrelméleti, konform térelméleti, valamint integrálhatósággal kapcsolatos ismereteimet szeretném elmélyíteni. Ebben sokat segít az őszi félévben Bajnok Zoltán témavezetőm előadásában hallgatott konform térelmélet kurzus, de ezen kívül a tavaszi félévben számos nemzetközi tavaszi iskolára jelentkeztem.

2 Gyakorlatvezetés

Az őszi félévben a fizikushallgatónak tartott kvantummechanika gyakorlat egyik gyakorlatvezetője voltam.

3 Külföldi előadás

Az ELTE Bolyai Kollégium szervezésében 2016. november 4-én a lausanne-i EPFL egyetemen részt vettem a "Swiss-Hungarian Workshop on Science Before the PhD" mini-konferencián, ahol egy 15 perces rövid előadást tartottam "Truncated Hilbert Space Approach for the 1+1D φ^4 theory" címmel.

4 Publikált cikk

A doktori felvételi eljárás közben elbírálás alatt állt Bajnok Zoltán témavezetőmmel közösen írt cikkünk. A cikk közben megjelent a jHEP folyóiratban[7].

5 Egyéb szakmai tevékenység

Részt vettem a 2016 őszén rendezett Nyílthelyi Fifikus Fizikus Feladatok kísérleti csapatverseny zsűrijében. Ezen kívül kitűztem egy feladatot az Ortvay Rudolf Fizikai Problémamegoldó Versenyen.

References

[1] L. Susskind, *"The World as a hologram"*, J.Math.Phys. 36 (1995) 6377-6396 [hep-th/9409089]

[2] J. M. Maldacena, *"The Large N limit of superconformal field theories and supergravity"*, Int.J.Theor.Phys. 38 (1999) 1113-1133; Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231-252 [hep-th/9711200]

[3] N. Beisert et al., *"Review of AdS/CFT Integrability: An Overview"* , Lett. Math. Phys. 99, 3 (2012) [arXiv:1012.3982]

[4] Z. Bajnok and R. Janik, "*String field theory vertex from integrability*", JHEP 1504 (2015) 042 [arXiv:1501.04533]

[5] Al. B. Zamolodchikov, "*On the Thermodynamic Bethe Ansatz Equation in Sinh-Gordon Model*", J.Phys. A39 (2006) 12863-12887 [hep-th/0005181]

[6] Y. H. He, J. H. Schwarz, M. Spradlin and A. Volovich, "*Explicit formulas for Neumann coefficients in the plane wave geometry*," Phys. Rev. D 67 (2003) 086005 [hep- th/0211198]; J. Lucietti, S. Schafer-Nameki and A. Sinha, "*On the plane wave cubic vertex*", Phys. Rev. D 70 (2004) 026005 [hep-th/0402185].

[7] Z. Bajnok and M. Lájer, "Truncated Hilbert space approach to the 2d ϕ^4 theory", JHEP 1610 (2016) 050 [arXiv:1512.06901]