4. félévi beszámoló

Vona István

(vona.istvan@wigner.hu)

Részecskefizika és csillagászat PhD program

Témavezető: Bajnok Zoltán

Előzmények, az előző három félévben elért eredmények

Az MSc diplomamunkámat folytatva a véges térfogati integrálható térelméletekben a lokális operátorok vákuum várható értékét a végtelen térfogati form-faktorokkal kifejező Leclair-Mussardo formulához [1] hasonló, a nem-diagonális form-faktorokat leíró sor lehetőségét kezdtem vizsgálni.

Az első félévben egy, ehhez a témához - kesvésbé szorosan - kapcsolódó probléma megoldásában vettem részt; témavezetőmmel a magasabb spinű megmaradó töltések áramsűrűségeinek várható értékeit számoltuk ki gerjesztett állapotok között, véges térfogatban, integrálható kvantumtérelméletben, melyből egy publikáció is született [2].

A következő két félév jelentős részében az MSc diplomamunkám során megismert és ellenőrzött, a véges térfogati nem-diagonális form faktorok vezető exponenciális korrekcióját meghatározó számolás kiterjesztésével próbálkoztam a vezető utáni (exponenciális) rendre, a kétpont-függvény vákuum-várható értékére vonatkozó spektrális sor [3] elemzésével. Az ennek a sorfejtésével kapott, vezető utáni rendű kontribúciók szétválogatása, - és annak meghatározása bizonyult nehéz feladatnak, hogy pontosan mely tagok tartoznak a véges térfogati form-faktorhoz. A konklúzióban konkrét modellekben elvégzett, numerikus ellenőrzés lehet iránymutató, amelyet a tervekkel ellentétben ezidáig nem sikerült elvégezni.

A harmadik félév egy részében egy másik (alább ismertetett) projektbe kapcsolódtam be, amely a nemlineáris $O(N)$ szigma-modellek *resurgent* analízisével foglalkozik.

Kutatási tevékenység

A félév során főként az erős mágneses térbe helyezett, 1+1 dimenziós $O(N)$ szigma-modellek mágneses tér szerinti perturbatív kifejtésével, és az ebből kapható nem-perturbatív korrekciók tanulmányozásával foglalkoztam.

Ezek a modellek egzaktul megoldhatóak, és toy-modellként a QCD-ben felbukkanóakhoz hasonló jelenségeket mutatnak. Jelen esetben az $O(N)$ sigma-modell Hamiltonijához egy megmaradó töltést (az egyik $O(N)$ generátort) adjuk hozzá h térerősséggel:

$$H(h) = H(0) - hQ_{12},$$

ahol

$$Q_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\sigma_1 \partial_0 \sigma_2 - \sigma_2 \partial_0 \sigma_1\right).$$

Az euklideszi elmélet Lagrange-sűrűsége ekkor a következőképpen fog kinézni:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2g^2} \left\{ \partial_\mu \vec{\sigma} \cdot \partial_\mu \vec{\sigma} + 2ih(\sigma_1 \partial_0 \sigma_2 - \sigma_2 \partial_0 \sigma_1) + h^2 \left(\sum_{i=3}^{N} \sigma_i^2 - 1 \right) \right\}, \quad \mu = 0, 1$$

ahol a $\vec{\sigma}(t,x)$ térre a következő feltétel kell teljesüljön:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N), \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = 1.$$

Ez a kiterjesztett modell segített az $O(N)$ modellek mass-gap összefüggéseinek (az $m \propto \Lambda_{\overline{\rm MS}}$ egyenes arányosságban szereplő numerikus együttható) meghatározásában a perturbációszámítás és az egzakt megoldás egyeztetésével. [4]

Ha a h térerősség értéke nagyobb, mint a mass gap értéke, akkor a $Q_{12} = +1$ töltésű részecskék az alapállapotban kondenzálódnak, és a kondenzátum részecske- és energia-sűrűsége a TBA (Termodinamikai Bethe-Ansatz) módszerrel származtatható:

$$\rho(B) = \int_{-B}^{B} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \chi(\theta),\ \varepsilon(B) = m \int_{-B}^{B} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \cosh\theta\, \chi(\theta),$$

ahol a $\chi(\theta)$ rapiditás-beli részecskesűrűség-eloszlásra a következő integrálegyenlet áll fenn:

$$\chi(\theta) - \int_{-B}^{B} \frac{\mathrm{d}\theta'}{2\pi} K(\theta-\theta')\chi(\theta') = m\cosh\theta, \quad K(\theta) = -i\partial_\theta \ln S(\theta), \tag{1}$$

itt $S(\theta)$ az $O(N)$ vektor-multiplett $Q_{12} = +1$ töltésű, kondenzálódó részecskéinek szórásmátrixa. Az intervallum, amelyen integrálunk, addig a $\theta = B$ rapiditásig tart, amely a Fermi-szinthez tartozik, ez a h térerősséggel összefüggésbe hozható [5], és

$$h \gg m \quad \Rightarrow \quad B \gg 1.$$

Mivel az elméletben csak a h a dimenziós paraméter, ez határozza meg a karakterisztikus energiát, amelynél az elméletet vizsgáljuk. Az elmélet aszimptotikusan szabad, tehát a $h \gg m$ esetben a perturbációszámítás alkalmazható. Másrészt viszont a Feynman-féle perturbációszámítás helyett praktikusabb az egzakt megoldást sorba fejteni $1/B$ szerint.

Ez utóbbira egy, a [6] tézisben kifejlesztett algoritmus adja a leghatékonyabb megoldást, amely a Wiener-Hopf módszeren alapul, és egy, többindexes együtthatókat tartalmazió rekurziós egyenletrendszerre fordítja le a problémát. Az együtthatókból a ρ, ε mennyiségek $1/B$ -beli (nulla konvergenciasugarú) aszimptotikus sorait

$$\rho(B) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n B^{-n}, \quad \varepsilon(B) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^{-n}$$

lehet megkapni (véges rendig). A ρ_n, ε_n együtthatók tipikusan faktoriális módon növekednek $\rho_n \sim n!$, ezért ezek a sorok nem konvergensek. Az együtthatókat $n!$-al leosztva egy véges konvergencia-sugarú összeget kapunk (Borel-transzformáció):

$$\hat{\rho}(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{\Gamma(n)} s^{n-1},$$

amelyet s-ben Laplace-transzformálva

$$\tilde{\rho}(B) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}s e^{-sB} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{\Gamma(n)} s^{n-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n B^{-n}$$

előáll egy $\tilde{\rho}(B)$ függvény, amelynek az aszimptotikus kifejtése a $\hat{\rho}(B)$ aszimptotikus sorral megegyezik, ellenben exponenciális (e^{-kB} jellegű, ahol k valamilyen pozitív egész szám), a $B \to \infty$ határesetben nem-analitikus (nem-perturbatív) korrekciókban eltérhet a fizikai $\rho(B)$ függvénytől. A perturbatív együtthatók aszimptotikus ($n \to \infty$) viselkedése információt szolgáltat ezen nem-perturbatív korrekciókról, ezek között keresi a kapcsolatot a *resurgence* elmélet [7].

Az „s” változóbeli komplex (ún. Borel) síkon a szingularitások sok esetben épp a pozitív valós félegyenesen helyezkednek el, így a Laplace-transzformációban más integrálási kontúrt kell választanunk (pl. pozitív valós tengellyel infinitezimális szöget bezáró félegyenes). Az integrál értéke ezeken más és más lehet (pl. a szingularitás alatt ill felett integrálva), ezek között az eltérés éppen exponenciális (e^{-B}) korrekciókat jelent. A fizikai $\rho(B)$ függvény előállítható a perturbációs sorból az ún. *median resummation*-nel [7].

Az $O(4)$ modellben az egzakt numerikus TBA-megoldás és perturbatív sorból kapott újrafelösszegzés összehasonlítása jó egyezést mutatott [5] (ld. 5. ábra). A félév során hasonló analízis elvégzésében segítettem az $O(3)$ modell esetére.

Ehhez azonban igen magas rendig (az $O(4)$ modell esetében pl. $M \sim 2000$) szükséges előállítani a perturbatív együtthatókat. Az $O(3)$ szigma modell esetén a fentebb említett algoritmus lényegesen lassabb, ezért szükség volt egy optimalizált implementációra amellyel végül $M \sim 300$-ad rending sikerült numerikusan kiszámítani a ρ_n, ε_n együtthatókat.

Ennek a felösszegzését már sikerült összehasonlítani a TBA numerikus eredményével. Ez egy vezető rendű nem-perturbatív eltérést mutat a kettő között, melynek forrását ezidáig nem sikerült jobban megérteni.

A kvantumtérelméletek esetében a Borel-sík szingularitásainak, vagyis végeredményben a nem-perturbatív korrekcióknak a forrásai egyébként instantonok vagy renormalonok lehetnek. Előbbiek a euklideszi elmélet véges hatású klasszikus megoldásai, amelyek újabb extremális pontjai a hatásfunkcionálnak, azaz ezek körül a pályaintegrál (a vákuummegoldáshoz hasonlóan) szintén perturbációs sorba fejthető, de ez a kontribúció egy - a fent említetthez hasonló - exponenciális faktorral el van nyomva. Az $O(3)$ modell esetén a szingularitások beazonosítása tehát még várat magára.

A rekurziós egyenletek numerikus megoldása helyett azok analitikus elemzésében is sikerült némi előrelépést tenni az $O(4)$ modell esetén. A magasabb spinű töltések

$$q^{(j)}(B) = \int_{-B}^{B} \mathrm{d}\theta \cosh(j\theta)\chi(\theta), \quad q^{(1)} \equiv \varepsilon$$

$$q^{(j)}(B) \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{(j)} B^{-n}$$

perturbatív együtthatóinak aszimptotikus viselkedését meg lehetett határozni a rekurziós egyenletek sorfejtésével analitikusan is, azaz kiszámítható az első néhány $A_0^{(j)}, A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \ldots$ ún. aszimptotikus együttható:

$$q_n^{(j)} \sim \Gamma(n) \left\{ A_0^{(j)} + \frac{A_1^{(j)}}{n} + \frac{A_2^{(j)}}{n(n-1)} + \ldots \right\}.$$

A jövőben az $O(3)$ modell esetében is az [5] cikkben az $O(4)$ modellre felállítotottakhoz hasonló összefüggések (ld. 6. fejezet) keresése lehet a cél, melyek közül egyesek már itt is igaznak bizonyultak.

Publikációk

Az első félév során végzett munkámmal hozzájárultam az "Exact finite volume expectation values of conserved currents" címmel a Physics Letters B folyóiratban közölt publikációhoz. [2]

Tanulmányi tevékenység

A félév során (online) részt vettem az alábbi workshopokon/iskolákon:

- ELFT Winter School - Physics beyond the Standard Model: Modern Approaches - `http://hector.elte.hu/iskola20/`
- Korean School on Holography: All-ography - `https://sites.google.com/view/holography-school`
- Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences: Spring school on asymptotic methods and applications - `https://www.newton.ac.uk/event/araw01`

melyek közül utóbbi szorosan kapcsolódott a félév során végzett kutatáshoz. Ezen kívül „A sztandard modellen túl" című tárgyat halgattam, melynek tematikája az ELFT iskolára épült (jeles).

Hivatkozások

[1] A. Leclair and G. Mussardo, „Finite temperature correlation functions in integrable QFT," *Nuclear Physics B* **552** no. 3, (1999) 624–642.

[2] Z. Bajnok and I. Vona, „Exact finite volume expectation values of conserved currents," *Physics Letters B* (2020) 135446.

[3] B. Pozsgay and I. M. Szécsényi, „LeClair-Mussardo series for two-point functions in Integrable QFT," *JHEP* **05** (2018) 170, `arXiv:1802.05890 [hep-th]`.

[4] P. Hasenfratz, M. Maggiore, and F. Niedermayer, „The exact mass gap of the O(3) and O(4) non-linear σ-models in d= 2," *Physics Letters B* **245** no. 3-4, (1990) 522–528.

[5] M. C. Abbott, Z. Bajnok, J. Balog, A. Hegedus, and S. Sadeghian, „Resurgence in the O(4) sigma model," 2020.

[6] D. Volin, „Quantum integrability and functional equations," *arXiv preprint arXiv:1003.4725* (2010) .

[7] D. Dorigoni, „An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus," *Annals of Physics* **409** (2019) 167914. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491619301691`.