1. Féléves Beszámoló

2023. június 30.

Somogyfoki Réka (somogyfoki.reka@wigner.hu)
Statisztikus Fizika, Biológiai Fizika és Kvantumrendszerek Fizikája Doktori Iskola

Témavezető: **Ván Péter**[1]

Téma: Nemlokális kontinuumok egyensúlyainak stabilitása

[1]Wigner Fizikai Kutatóközpont RMI, Elméleti Fizika Osztály

1. Bevezetés

A doktori iskolában végzett kutatásom elsődleges célja a nemegyensúlyi termodinamikai módszertannal klasszikus folyadékok nemlokálisan kiterjesztett fejlődési egyenleteinek származtatása. Elérendő cél továbbá megismerni ezen egyenletek egyensúlyi megoldásainak stabilitását, elsősorban klasszikus gravotermikus rendszerek esetén, ahol az ismert megoldásokkal és stabilitási kritériumokkal való kompatibilitás egy ellenőrzési opció. Továbblépési lehetőség a kontinuumegyenletek generikus stabilitásának vizsgálata, illetve a módszertan relativisztikus és kvantumos kiterjeszthetőségének elemzése.

Ezen kitűzött célok nem csak a klasszikus folyadékok nemlokális, gravotermikus rendszerekre történő kiterjesztésének témájában az elmúlt években megjelent érdekes eredményeknek a részletesebb kidolgozását foglalják maguk közé, hanem ezen eredmények továbbvitelét, az ismert és az új megoldásokkal kapcsolatban felmerülő további kutatási irányok megvizsgálását, valamint az erre vonatkozó irodalom feltárását.

A klasszikus folyadékok fejlődési egyenletinek szerkezetének univerzális termodinamikai módszerek segítségével történő kiterjesztése, ezen kiterjesztések származtatása a sűrűség, sebesség és csatolt skaláris mezők esetén, illetve annak feltárása, hogy ezzel kapcsolatosan milyen új megoldások, az új megoldások révén pedig esetleg milyen új fizikai eredmények születhetnek, nyílt kérdést jelent a kutatási irányzatban. Fontos szempont az új megoldások viszonyának megállapítása az irodalomban megtalálható eredményekkel, valamint a statisztikus fizika módszertanával kapott megoldásokkal.

2. Az aktuális félévben elvégzett kutatások ismertetése

A doktori képzés első félévének fő feladatául a klasszikus skalárterek kontinuumokkal való kapcsolódására vonatkozó irodalom feltárása, illetve az új nemegyensúlyi termodinamikai módszertan feldolgozása, a vonatkozó a problémák mélyebb megértése volt kitűzve. Az első félévben a szükséges módszertan elsajátítására került hangsúly, egyelőre a termodinamikai megközelítésből. A további félévek kutatómunkájához a most elsajátított módszertan minél szélesebb körű alkalmazása lesz szükséges, hogy a technikákat, módszereket a később megismert folyamatokba biztonsággal be tudjam építeni.

2.1. Matematikai módszertan/háttér

A termodinamika dinamikai stabilitási elméletként történő értelmezése rámutat a második főtétel alapvető jellegére. Ennek a kérdéskörnek egy vizsgálati módszerét generikus stabilitásnak nevezzük, speciális relativisztikus folyadékok esetén kialakult szóhasználat alapján. Ez alatt a makroszkopikus kontinuumok azon tulajdonságát értjük, miszerint a fejlődési egyenletek egyensúlyi megoldása homogén peremfeltételek esetén aszimptotikusan stabil, ahol az egyetlen kiszabott feltétel a tiszta termodinamikai törvényszerűségek teljesülése. A generikus stabilitás specifikus egyensúlyokhoz kapcsolódik, nem pedig általános egyensúlyi állapotokhoz. [1]

A generikus stabilitás szükséges feltétele a lineáris stabilitás teljesülése. Egy egykomponensű, nemrelativisztikus folyadék általánosított formájának lineáris stabilitása, fajlagos mennyiségekkel a következőképpen alakul. [2]

Az alapmezők és egyensúlyaik:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i + \partial_i j^i = 0, \tag{1}$$

$$(\rho u)^{\cdot} + \rho u \partial_i v^i + \partial_i l^i = 0, \tag{2}$$

$$(\rho v^i)^{\cdot} + \rho v^i \partial_j v^j + \partial_j (P^{ij} + j^j m v^i) = 0^i, \tag{3}$$

ahol ρ a tömegsűrűség, u a fajlagos belső energia, v^i a sebességmező, l^i az energia-áramsűrűség, j^i a részecske-áramsűrűség, P^{ij} a nyomástenzor, a pont a szubsztanciális időderiváltat jelöli, az $i, j, k, \ldots$ indexek pedig 1,2,3 értéket vesznek fel és érvényes rájuk az Einstein-féle összegzési szabály. Ezek felhasználásával a fajlagos belső energiára vonatkozó egyensúly

$$\rho \dot{u} - u \partial_i j^i + \partial_i q^i = -P^{ij} \partial_j v_i \tag{4}$$

alakú, ahol bevezettük a q^i hőáramot.

A következőkben termodinamikai egyensúlyt feltételezünk, vagyis eltekintünk a fázisátalakulásoktól. Ennek szükséges és elégséges feltétele a fajlagos entrópia konkávitása, amely alapján a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$0 \leq \partial_u T \partial_\rho \mu - \partial_u \mu \partial_\rho T, \qquad \text{illetve} \qquad 0 \leq T \partial_\rho \mu - \mu \partial_\rho T, \tag{5}$$

ahol $T(u,\rho)$ a hőmérséklet és $\mu(u,\rho)$ a kémiai potenciál.

A mérlegek olyan egyensúlyi megoldásainak stabilitását vizsgáljuk, ahol a megjelenő szubsztanciális idő deriváltak és a disszipatív áramok eltűnnek. Belátható továbbá, hogy a sebességmező divergencia- és rotációmentes. Homogén, időben állandó mezőkre a homogén egyensúly lineáris stabilitása a következőképpen vizsgálható.

Az (1)-(3) egyenletek egyensúly körül linearizált alakja, a bevezetett ρ_0, p_0, μ_0, T_0 egyensúlyi mennyiségekkel, 1+1 dimenzióban:

$$-\Gamma \delta \rho + \rho_0 ik \delta v + ik \delta j = 0, \tag{6}$$

$$-\rho_0 \Gamma \delta u + ik \delta q + ik p_0 \delta v = 0, \tag{7}$$

$$\rho_0 \Gamma \delta v + ik \delta P = 0, \tag{8}$$

Ezekhez hozzátartoznak az öndiffúziót leíró Fick-egyenlet, a Newtoni nyomástenzor, és a Fourier-egyenlet, amelyeket behehelyettesítve kapnánk a Fick–Fourier–Navier–Stokes-egyenletrendszert. 1+1 dimenzióban ezek a következőképpen írhatók fel.

$$\delta j + \frac{ikl_1}{T_0} \left[\Big(\partial_u \mu \delta u + \partial_\rho \mu \delta \rho \Big) - \frac{\mu_0}{T_0} \Big(\partial_u T \delta u + \partial_\rho T \delta \rho \Big) \right] = 0 \tag{9}$$

[2] A számításokban a diffúziós áram megjelenését magyarázza, hogy nem-relativisztikus folyadékokban ez egyenértékű egy, a relativisztikus folyadékok esetén szokásos általános áramlási kerettel, amikor a kontinuum sebességmezeje nem feltétlenül rögzített egy konzervált mennyiséghez.

$$\delta q + \frac{ikl_2}{T_0^2}\Big(\partial_u T\delta u + \partial_\rho T\delta\rho\Big) = 0 \tag{10}$$

$$\delta P + \eta ik\delta v - \partial_u P\delta u - \partial_\rho P\delta\rho = 0 \tag{11}$$

A fenti egyenleteket a következőképpen mátrixalakba rendezhetjük:

$$\begin{bmatrix} -\Gamma & 0 & ik\rho_0 & ik & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_0\Gamma & ikp_0 & 0 & ik & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_0\Gamma & 0 & 0 & ik \\ \frac{ikl_1}{T_0}(\partial_\rho\mu - \frac{\mu_0}{T_0}\partial_\rho T) & \frac{ikl_1}{T_0}(\partial_u\mu - \frac{\mu_0}{T_0}\partial_u T) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{ikl_2}{T_0^2}\partial_\rho T & \frac{ikl_2}{T_0^2}\partial_u T & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\partial_\rho P & -\partial_u P & ik\eta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta j \\ \delta q \\ \delta P \end{bmatrix} = 0, \tag{12}$$

ahol η a súrlódási együttható. A mátrix determinánsának eltűnése az exponenciálisan növekvő amplitúdójú,

$$Q = Q_0 + \delta Q e^{-\Gamma t + ikx} \tag{13}$$

alakú síkhullám megoldások létezésének feltétele. Az ebből származó diszperziós reláció, Γ hatványok szerint rendezve:

$$\begin{aligned} &\Gamma^3\rho_0 T_0^3 + \Gamma^2 k^2\Big((\mu_0\partial_\rho T - T_0\partial_\rho\mu)k^2 l_1\rho_0^2 T_0 - \partial_u T k^2 l_2\rho_0 T_0 - \eta k^2\rho_0 T_0^3\Big) + \\ &\quad + \frac{\Gamma k^2}{\rho_0}\Big((\partial_\rho\mu\partial_u T - \partial_\rho T\partial_u\mu)k^4 l_1 l_2\rho_0 + (T_0\partial_\rho\mu - \mu_0\partial_\rho T)\eta k^4 l_1\rho_0 T_0 + \\ &\qquad + \partial_u p k^2 p_0 T_0^3 + \partial_u T\eta k^4 l_2 T_0 + \partial_\rho p k^2\rho_0^2 T_0^3\Big) + \\ &\quad + \frac{k^4}{\rho_0}\Big((\partial_\rho p\partial_u\mu - \partial_\rho\mu\partial_u p)k^4 l_1 p_0 T_0^2 + (\partial_\rho T\partial_u\mu - \partial_\rho\mu\partial_u T)\eta k^6 l_1 l_2 + \\ &\quad + (\partial_\rho T\partial_u p - \partial_\rho p\partial_u T)k^4 l_1\mu_0 p_0 T_0 + (\partial_\rho T\partial_u p - \partial_\rho p\partial_u T)k^4 l_2\rho_0 T_0\Big) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

A Routh–Hurwitz-kritérium kimondja, hogy egy $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ alakú, harmadrendű polinom gyökeinek valós részei negatívak pontosan akkor, ha a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$a_3,\, a_2 > 0, \qquad \text{illetve} \qquad a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \tag{15}$$

A fenti (14) diszperziós relációra alkalmazva a (15) Routh–Hurwitz-kritériumokat, a_3 pozitivitását könnyen beláthatjuk. Az $a_2 > 0$, illetve a harmadik kritériumba a kapott együtthatókat behelyettesítve kapott kifejezések esetén tagonként belátható, hogy az egyenlőtlenség teljesül, vagyis a mátrix-determináns eltűnésére létezik nemtriviális megoldás, a Fick–Fourier–Navier–Stokes-folyadékok homogén egyensúlyának lineáris stabilitását beláttuk. A folyamat során az is bebizonyosodott, hogy a stabilitási feltételek teljesüléséhez elegendő volt a már jól ismert, entrópia konkávitásából következő termodinamikai egyenlőtlenségeket (5) felhasználnunk.

3. Publikációk, konferenciák

Májusban jelent meg a *Mérnökgeológia—Kőzetmechanika Kiskönyvtár* könyvsorozat 26. kötete [2], melyben korábbi kutatómunkám összefoglalására született cikkem *Térfogatfogalmak a fekete lyukak termodinamikájában* címmel szerepel. A cikk anyagából tudományos publikáció megjelentetése szerepel a terveim közt a közeljövőre. A *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika 2023* konferencián 2023. május 10-én, mint hallgató vettem részt, melynek keretei között az említett könyv bemutatásra került.

4. Tanulmányi tevékenység

A félév során két tárgyat vettem fel és végeztem el, mindkettőt jeles eredménnyel. A *FIZ/3/017E Környezeti áramlások fizikája* előadás keretei között egy, kifejezetten elméleti fizikus célközönségnek szóló jegyzet részletes elemzésén keresztül ismerkedtem meg a folytonos közegek áramlástani sajátosságaival, szabályszerűségeivel, stabilitásvizsgálati módszereivel, amelyek mind szorosan összefüggésben állnak a kutatási területemmel.

A *FIZ/5/006 Adatbányászat a csillagászatban* tárgy során egy önálló adatbányász projekten dolgoztam, gravitációs hullám analízis témakörben. Az elsajátított programozói eszköztárból a kutatómunkám későbbi szakaszához sok új ismeret, de főképp a *Wiener filtering* alkalmazása fog hasznosnak bizonyulni.

Ezeken felül a Wigner Fizikai Kutatóközpontban részt vettem egy, az egykomponensű, disszipatív folyadékok vonatkoztatási rendszertől független kezelését feldolgozó szemináriumon. Itt a fizikai mennyiségek megfelelő Galilei-transzformációs szabályainak levezetésére alapozva, felírva a lineáris konstitutív összefüggéseket, beláttuk, hogy az olyan termodinamikai princípiumok, mint az extenzivitási feltétel vagy az entrópiamérleg, vonatkoztatási rendszertől függetlenek. [3]

Hivatkozások

[1] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(02):P02054, 2009.

[2] P. Ván D. M. Takács and B. Vásárhelyi. *Kőzetmechanika és termodinamika [Rock mechanics and thermodynamics].* Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, 2023.

[3] Péter Ván. Galilean relativistic fluid mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(2):585–610, 2017.

Somogyfoki Réka