4. Féléves Beszámoló

2025. január 20.

Somogyfoki Réka (somogyfoki.reka@wigner.hu)
Statisztikus Fizika, Biológiai Fizika és Kvantumrendszerek Fizikája Doktori Iskola

Témavezető: **Ván Péter**[1]

Téma: Nemlokális kontinuumok egyensúlyainak stabilitása

[1]HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont RMI, Elméleti Fizika Osztály

1. Bevezetés

A doktori iskolában végzett kutatásom elsődleges célja a nemegyensúlyi termodinamikai módszertannal klasszikus folyadékok nemlokálisan kiterjesztett fejlődési egyenleteinek származtatása. Ezen egyenletek egyensúlyi megoldásainak stabilitásának vizsgálata különös figyelmet kapott, különösen klasszikus gravotermikus rendszerek esetén. E kutatások során célom volt megérteni ezen egyenletek stabilitását és az ismert megoldásokkal való kompatibilitást, valamint továbblépési lehetőségeket keresni a kontinuumegyenletek generikus stabilitásának vizsgálatában, illetve módszertanuk relativisztikus és kvantumos kiterjeszthetőségében.

Az eddig végzett kutatások során többféle hővezetési modell egyenleteinek, mint például a Jeffreys, Burgers, Guyer–Krumhansl stb., lineáris stabilitásvizsgálatára fókuszáltam. Az általános termodinamikai megközelítések alkalmazása lehetővé tette a stabilitási feltételek és az anyagi tulajdonságok összefüggéseinek mélyebb megértését, ezek segítségével az egyensúlyi állapotok stabilitásának elemzését.

Az elmúlt két év kutatásainak eredményei rámutattak arra, hogy a klasszikus folyadékok hővezetési egyenleteinek stabilitása szoros kapcsolatban áll a termodinamikai feltételek teljesülésével. A kiterjesztett termodinamika elméletei, valamint a disszipatív folyadékok stabilitási feltételeinek vizsgálata megerősítette a nemlineáris parciális differenciálegyenletek homogén egyensúlyainak stabilitási kritériumait.

2. Az eddigi félévek kutatásainak összegzése

1. Félév

Az első félévben a klasszikus skalárterek kontinuumokkal való kapcsolódására vonatkozó irodalom feltárása, valamint az új nemegyensúlyi termodinamikai módszertan feldolgozása állt a középpontban. Ekkor a szükséges módszertan elsajátítására került a hangsúly, amelyet a későbbi félévek során alkalmaztam.

2. Félév

A második félévben a kutatási tevékenységem a disszipatív folyadékokra vonatkozó nemlineáris parciális differenciálegyenletek homogén termodinamikai egyensúlyának lineáris stabilitásvizsgálatára fókuszálódott. Ezen egyenletek homogén egyensúlyának aszimptotikus stabilitása a termodinamika második főtételéből elvileg következik, amennyiben maga a fejlődési egyenlet kompatibilis a második főtétellel, illetve a második főtétel segítségével származtatható. A lineáris stabilitás ennek szükséges feltétele. Nemrelativisztikus disszipatív folyadékok esetén a homogén termodinamikai egyensúly lineáris stabilitása a Fourier-Navier-Stokes rendszeren bizonyítható, az elvárásoknak megfelelően [1]. Felmerül azonban a kérdés, hogy mik a feltételei a másod- és magasabbrendű elméleteknek, szintén nemrelativisztikus kontinuumok esetén. Például, hogy a fononhidrodinamika magasabb rendű hővezetési elméleteinek homogén egyensúlya stabil-e, illetve, hogy a stabilitási feltételek kiterjednek-e a tiszta termodinamikán túl, mint a speciális relativisztikus disszipatív folyadékok esetében.

Egy első-, illetve egy másodrendű tenzoriális belső változó (y,Y) bevezetésével a probléma linearizálása után a következő mátrix alakjába rendeződnek az együtthatók:

$$\begin{bmatrix} -\rho c\Gamma+\lambda_1 k^2 & -\lambda_{12} ik & 0 \\ \lambda_{21} ik & \rho m_1\Gamma+\kappa_1 k^2+\lambda_2 & \kappa_{12} ik \\ 0 & -\kappa_{21} ik & \rho m_2\Gamma+nk^2+\kappa_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T \\ y \\ Y \end{bmatrix} = 0, \tag{1}$$

ahol T a hőmérséklet, m_1, m_2 pozitív konstansok, n, k, κ_1, κ_2, κ_{12}, κ_{21} pedig pozitív anyagi együtthatók. λ_1, λ_2, λ_{12} és λ_{21} a Fourier hővezetési együtthatóval állnak kapcsolatban. A diszperziós relációt a mátrix determinánsának eltűnése adja.

A *Routh–Hurwitz-kritérium* kimondja, hogy egy $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=0$ alakú, harmadrendű polinom gyökeinek valós részei negatívak pontosan akkor, ha a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$a_3,\ a_2>0, \qquad \text{illetve} \qquad a_1a_2-a_0a_3>0. \tag{2}$$

A fenti mátrixból adódó diszperziós relációra alkalmazva a (2) Routh–Hurwitz-kritériumokat az egyenletrendszer stabilitása könnyen belátható. Ez a fonon-hidrodinamika másodrendű egyenleteinek stabilitásvizsgálatára vonatkozó kutatásaim egyik alappillére.

3. Félév

A harmadik félévében, az előző félévek munkájából következő egyenes ági folytatásként a kutatási tevékenységem a különböző típusú hővezetési modellek, mint például a Jeffreys, Burgers, Guyer–Krumhansl stb. egyenleteinek lineáris stabilitásvizsgálatára irányult.

A hővezetési elméletekben a belső energia mérlege a kiindulópont. Ez az alábbi formában írható fel:

$$\rho\dot{e}+\partial_i q^i=0, \tag{3}$$

ahol a pont a szubsztanciális időderiváltat jelöli, $\dot{e}=\partial_t e+v^i\partial_i e$, ∂_i a térderivált, ρ a tömegsűrűség, e a fajlagos belső energia, és q^i a hőáram, valamint $i=1,2,3$.

Az állapotegyenlet határozza meg az entrópiasűrűséget a termodinamikai állapottér változóinak függvényében. A klasszikus Fourier-elméletben ez a kalorikus állapotegyenlet, amely $e=cT$ formában van megadva, ahol T a hőmérséklet és c a hőkapacitás. Esetünkben ez kiterjesztett formában, ahol az entrópia függ a belső energiától, a hőáramtól (q^i), valamint a hőáram fluxusától (Q^{ij}) is, az alábbiak szerint:

$$s(e,q^i,Q^{ij})=s^{(eq)}(e)-\frac{1}{2\rho}q^i m_{ij}q^j-\frac{1}{2\rho}Q^{ij}M_{jilk}Q^{kl}. \tag{4}$$

Az entrópiaáram várhatóan nulla, ha q^i és Q^{ij} nullák, ezért a következő formában írhatjuk fel:

$$J^i(e,q^i,Q^{ij})=b^i_j q^j+B^i_{kj}Q^{jk}, \tag{5}$$

ahol a b^i_j és B^i_{kj} együttható függvények az úgynevezett Nyíri-szorzók.

Ha a hőáramot (q^i) alapmezőnek tekintjük, akkor a következő lépés ennek evolúciós egyenletének származtatása, valamint az konstitúciós függvények segítségével a Nyíri-szorzók meghatározása. Mivel a konstitúciós függvények határozzák meg az anyagi tulajdonságokat, ezért korlátozza őket a termodinamika második főtétele, az entrópiamérleg:

$$\rho\dot{s} + \partial_i J^i = \Sigma \geq 0. \tag{6}$$

Az entrópiaprodukcióra vonatkozó egyenlőtlenség lineáris megoldása a következő formában írható fel:

$$\begin{pmatrix} m_{ij} f^j - \partial_j b^j_i \\ b^j_k - \frac{1}{T}\delta^j_k \\ M_{lmvw} F^{wv} - \partial_w B^w_{lm} \\ B^n_{op} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{11}L_{ia} & {}^{12}L^b_{ic} & {}^{13}L_{ide} & {}^{14}L^f_{igh} \\ {}^{21}L^j_{ka} & {}^{22}L^{j\ b}_{kc} & {}^{23}L^j_{kde} & {}^{24}L^{j\ f}_{kgh} \\ {}^{31}L_{lma} & {}^{32}L^b_{lmc} & {}^{33}L_{lmde} & {}^{34}L^f_{lmgh} \\ {}^{41}L^n_{opa} & {}^{42}L^{n\ b}_{opc} & {}^{43}L^n_{opde} & {}^{44}L^{n\ f}_{opgh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q^a \\ \partial_b q^c \\ -Q^{ed} \\ \partial_f Q^{hg} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

ahol $f^i = \dot{q}^i$, illetve $F^{ij} = \dot{Q}^{ij}$ szintén konstitúciós függvények.

Elemzésünk egy térbeli dimenzióra korlátozódott, a termodinamikai induktivitások így anyagi szimmetriáktól független skalárok, és feltételeztük továbbá, hogy a mennyiségek csak az x koordináta irányában változnak. Átalakítások után, valamint bevezetve a

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ 0 & \kappa_{21} & \kappa_{22} & \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L^{(1)} & 0 & 0 & -L^{(1,4)} \\ 0 & L^{(2)} & -L^{(2,3)} & 0 \\ 0 & -L^{(3,2)} & L^{(3)} & 0 \\ -L^{(4,1)} & 0 & 0 & C^{(4)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

jelölésrendszert az együtthatókra, az entrópiára vonatkozó egyenlőtlenség lineáris megoldása a következőképpen alakul:

$$m\dot{q} - \partial_x b = -\lambda_{11} q + \lambda_{12}\partial_x Q, \tag{9}$$

$$b - \frac{1}{T} = \kappa_{11}\partial_x q - \kappa_{12} Q, \tag{10}$$

$$M\dot{Q} - \partial_x B = \kappa_{21}\partial_x q - \kappa_{22} Q, \tag{11}$$

$$B = -\lambda_{21} q + \lambda_{22}\partial_x Q. \tag{12}$$

A (9)-(12) egyenletrendszerből származtatható speciális esetek elemzése azon az elven alapul, hogy kísérleti szempontból csak azok a speciális hővezetési egyenletek életképesek, amelyek egy adott folyamat hiányában keletkeznek, amelynek létezését anyagi tulajdonságok határozzák meg. Egy tagot nem lehet önkényesen eltávolítani a (9)-(12) egyenletrendszerből, egyedül csak a termodinamikai paraméterekre vonatkozó feltételek bírnak fizikai jelentőséggel.

2.1. Konklúziók

A termodinamikai feltételek - a konkáv entrópia és a nemnegatív entrópiaprodukció - a legtöbb esetben biztosítják a homogén egyensúly lineáris stabilitását. Az esetleges instabilitás a legáltalánosabb szinten jelenik meg. A speciális esetek, mint a kiterjesztett termodinamika (ET) elméletei, stabilak, mert az instabilitás a hőáram diffúziójának (l_q) és a hőáram áramának diffúziójának (l_Q) nem nulla karakterisztikus hosszaival kapcsolatos, és ezek a kifejezések hiányoznak a kiterjesztett irreverzibilis termodinamika és a racionális irreverzibilis termodinamika elméleteiből.

Számos ismert hővezetési elmélet evolúciós egyenletei megkaphatók az ismertetett egységes nemegyensúlyi termodinamikai elméleti keretben. Azonban több fontos esetben a kapott egyenletek degeneráltak. Például a Jeffreys-típusú egyenlet esetében az eredményül kapott három anyagi együttható nem volt független. Hasonló figyelhető meg az kiterjesztett termodinamika kilenc mező-elméletének, a Burgers-egyenletnek, és a Quintanilla-egyenletnek az eseteiben is.

3. Az aktuális félévben elvégzett kutatások ismertetése

A doktori képzés negyedik félévében a kutatási tevékenységem kimerült az eddig szerzett ismeretek rendszerezésében, az alább feltüntetett cikk megjelenése utáni lehetőségek, és az arra vonatkozó irodalom feltárásában. A félév során felelevenítettem az ismereteimet a fekete lyukak termodinamikai stabilitásáról, mind a korábbi munkám alapján, mind az irodalomban történt előrelépésekről a témában. A fő fókuszt arra a kérdésre helyeztem, hogy a doktori program során tervezett stabilitásvizsgálatok hogyan egyesíthetők a fekete lyukak stabilitásának kérdéseivel. A matematikai módszertant pontosan melyik aspektusára, hogyan lehetne alkalmazni. Ez a kutatásom következő fázisa, amerre a program során haladni szeretnék a közeljövőben.

4. Publikációk, konferenciák a képzés során

- **R. Somogyfoki, A. Famá, L. Restuccia, P. Ván. Thermodynamics and Dynamic Stability: Extended Theories of Heat Conduction. [2]** Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics (2025), online elérhető, elfogadva

- 2023. május: *Mérnökgeológia—Kőzetmechanika Kiskönyvtár* könyvsorozat 26. kötete [3] *Térfogatfogalmak a fekete lyukak termodinamikájában* fejezet

- 2023. december 4-8. 23. Nehézion-fizika Zimányi Iskola, *Stability of Non-Relativistic Fluids: Thermodynamic Conditions* című poszter.

- 2024. október 2-4., Prága V4 High Energy Physics konferencián előadás tartása a *fekete lyukak temodinamikai stabilitása* témakörben

- 2024. október 25. Statisztikus fizikai napon előadás tartása *Termodinamika és diszperziós relációk* címmel, a megjelent publikáció alapján.

5. Tanulmányi tevékenység

A félév során két tárgyat vettem fel és végeztem el: A *FIZ/5/017* Sugárzási folyamatok az asztrofizikában előadást, illetve a *FIZ/3/064E* Klaszterezés hálózatokkal-t.

Hivatkozások

[1] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(02):P02054, 2009.

[2] Réka Somogyfoki, Alessio Famá, Liliana Restuccia, and Peter Ván. Thermodynamics and dynamic stability: extended theories of heat conduction. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 50(1):59–76, 2025.

[3] P. Ván D. M. Takács and B. Vásárhelyi. *Kőzetmechanika és termodinamika [Rock mechanics and thermodynamics].* Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, 2023.

Somogyfoki Réka