

4. félévi beszámoló

Borsi Márton (borsimarton96@gmail.com)

Integrálható spinláncok dinamikája és korrelációs függvényei

Részecskefizika és Atommagfizika PhD program

Témavezető: Pozsgay Balázs

1. Bevezetés

A kölcsönható kvantummodellek viszonylag szűk osztályára igaz csupán, hogy egzaktul megoldhatók. Egy ilyen osztályt alkotnak az egy dimenzióban létező integrálható rendszerek, melyek közös tulajdonsága, hogy végtelen számú megmaradó mennyiséget tartalmaznak. A példák sokfélék: spinláncmodellek, térelméletek és diszkrét időfejlődésű kvantumáramkörök között is találunk integrálhatókat. Bár a tipikus megoldási módszert jelentő Bethe-ansatz, valamint a töltések algebrai háttere is hosszú ideje ismert, a téma napjaink egy aktív kutatási területe folyamatosan felbukkanó újabb nyitott kérdésekkel. Ösztönző erőt jelentenek a modern, hideg atomos kísérletek is, melyekkel lehetőség van integrálható rendszerek tényleges létrehozására és elméleti jóslatok ellenőrzésére.

Központi kérdés az integrálható modellek nemegyensúlyi dinamikájának vizsgálata. Csupán 10 éves múltat tekint vissza a transzportfolyamatokat leíró Általánosított Hidrodinamika (Generalized Hydrodynamics, GHD), mely a töltésekre vonatkozó kontinuitási egyenletekből indul ki. A kísérleti sikereknek is örvendő effektív elmélethez kapcsolódó fontos kérdés, hogy miként vezethető az le a fundamentális kvantummechanikai leírásból.

A töltések jelenléte komoly megkötéseket tesz az integrálható rendszerek dinamikájára. Az ergodikus rendszerektől való eltérés egy indikátora az operátortérbeli összefonódási entrópia. Numerikusan igazolt, hogy integrálható rendszerekben a mennyiség lassabban nő (lineáris helyett logaritmikusan). Analitikus eredmény azonban csupán a legegyszerűbb modellek esetén áll rendelkezésre.

A dinamikán túl egy másik lényeges kérdés, hogy milyen új (esetlegesen egyszerűbben megoldható) integrálható modelleket találhatunk. A jelenlegi kutatások gyakran fókuszálnak elsőszomszédnál távolabb kölcsönható rácsmodellekre, valamint diszkrét időfejlődésű kvantumáramkörökre.

2. Az előző három félév kutatási munkája

Az elmúlt félévek során több különböző feladaton is dolgoztam az integrálható rácsmodellek témakörében, melyeket időrendben tárgyalok.

A képzés elején befejeztem egy korábbi kutatómunkát, ami a GHD témaköréhez tartozott. Az elmélet egyik alapegyenlete szerint termodinamikai limeszben a megmaradó mennyiségekhez tartozó áramoperátorok várható értéke a modellben megjelenő kvázirészecskék effektív sebesség - szállított töltés szorzatainak összegeként áll elő. A formulát egy véges térfogatú eredményből

sikerült bizonyítani az XXX spinlánc esetében. Levezettem továbbá, hogy az áramok és töltések termodinamikai limeszben vett várható értéke miként állítható elő generátorfüggvények segítségével.

Az áramok várható értékei azért is lényegesek, mert hozzájuk tartozó dinamikai amplitúdók segítségével időfüggő korrelációs függvények viselkedése írható le. A vonatkozó amplitúdókat sikerült kiszámítanom a fentiek felhasználásával. Mindezen eredmények egy áttekintő (review) cikkben kerültek publikálásra, melynek megírására a témavezetőm kapott felkérést.

Egy másik munkában az integrálhatóság gyenge sértését vizsgáltuk volna. Arra voltunk kíváncsiak, hogy alkalmazható-e a GHD elmélete ilyen esetben is. Konkrét modellnek a fázisvesztő (dephasing) XX spinláncot választottuk az egyszerűsége miatt, melynek a környezettel való kölcsönhatását a Lindblad-egyenlet írja le. Kezdetben több eredményt is sikerült meghatározni: a stacionárius állapotot, a korrelációs függvények időfejlődését, a töltések exponenciális eltűnését, azonban a kitűzött feladat túl nehéznek bizonyult, így otthagytuk a problémát.

Mikor a kutatócsoportom kidolgozta az első szomszédnál távolabb kölcsönható (medium range) integrálható modellek algebrai hátterét, én is részt vettem az új modellek keresésében. Ez tipikusan az integrálható Hamilton-operátorokra vonatkozó Reshetikhin-feltétel alkalmazásával történik: felparaméterezzük a modellt és megvizsgáljuk, milyen értékek esetén teljesül a feltétel. A Mathematica szoftver felhasználásával sikerült megmutatnom, hogy az $SU(2)$ -invariáns háromrácspontos elméletek között nem találunk új integrálhatókat. Célom volt továbbá a háromrácspontos IRF (Interaction Round-a-Face) típusú integrálható modellek feltérképezése (ahol a két szélső rácspont vezérlő bitként funkcionál). Több modelleszaladot sikerült is elkülöníteni, de a teljes klasszifikáció reménytelen volt a paraméterek magas száma miatt.

A 2021/2022 tanévben elnyertem az ÚNKP ösztöndíjat, melynek keretében diszkrét időfejlődésű kvantumáramkörökkel foglalkoztam, azon belül is duál unitér modellekkel, melyekben a kvantumkapu idő- és térbeli irányban is unitér. Ezek szintén megoldhatónak számítanak, viszont csak részben fednek át az integrálható osztállyal. Permutációs kapuk ergodikus tulajdonságait vizsgáltuk két mennyiségre fókuszálva: a töltések számára és az időre, ami alatt a rendszer visszajut a kezdeti állapotba. Két meglepő jelenséget találtunk: egyes modellekben a töltések csak magasabb rácsponthossz esetén jelennek meg, valamint maximálisan kaotikus modellek is mutatnak nemergodikus viselkedést. Az eredményeket egy idén megjelent cikkben összegeztük.

3. Kutatási munka a félévben

A félév elején elvégeztem a letisztázását egy ismert eredménynek. Az integrálhatóság algebrai hátterét a Yang-Baxter-egyenlet adja:

$$\check{R}_{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2)\check{R}_{2,3}(\lambda_1)\check{R}_{1,2}(\lambda_2) = \check{R}_{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2)\check{R}_{2,3}(\lambda_1)\check{R}_{1,2}(\lambda_2). \quad (1)$$

Ahol $\check{R}_{j,k}(\lambda)$ j -edik és k -edik téren hat, λ pedig a rapiditásparaméter. A megoldások egy hamazát kapjuk a $\check{R}_{j,k}(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda)U_{j,k}$ ansatz behelyettesítésével. A λ -függés lényegében egyértelmű, az U mátrixnak pedig lényegében a Hecke algebrát kell kielégítenie. Levezettem, hogy az ansatz-ból származó modellek Hamilton-operátora valóban kielégíti a (fentebb már említett) Reshetikhin-feltételt, azaz a

$$q_{j,j+1,j+2}^{(3)} = [h_{j,j+1}, h_{j+1,j+2}] \quad (2)$$

sűrűség teljes térfogatra vett összege időállandó ($h_{j,j+1}$ a j -edik és $j + 1$ -edik rácsponton ható Hamilton-sűrűség).

A félév során egy új feladatba kezdtem bele: lokális operátorok összefonódási entrópiájának vizsgálatába. Numerikus példák mutatják, hogy integrálható rendszerekben a mennyiség csupán

logaritmikusan nő az időben szemben az ergodikus lineáris viselkedéssel. Analitikus eredmények azonban csak egy-egy egyszerűbb esetben állnak rendelkezésre.

Az operátortérbeli összefonódási entrópia a következő módon definiált. A tér $A \cup B$ felosztását véve egy \mathcal{O} operátor Schmidt-dekompozíciója a következő:

$$\frac{\mathcal{O}}{\text{Tr}\{\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\}} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathcal{O}_{A,j} \otimes \mathcal{O}_{B,j}, \quad (3)$$

ahol $\lambda_j > 0$ és $\sum_j \lambda_j = 1$. Vehetjük tehát a szokásos von Neumann-entrópiát:

$$S(\mathcal{O}) = - \sum_j \lambda_j \ln \lambda_j. \quad (4)$$

Az eddigiekben elsősorban az irodalom áttekintését végeztem el a néhány elérhető analitikus bizonyításra fókuszálva. Kvantumáramkörök közül a Rule 54 néven ismert modellben van korábbi eredmény [1]. A bizonyítás itt egyfajta szolitonképre épül, kihasználva azt, hogy az operátorterjedés lépésről lépésre követhető a diszkrét időfejlődés miatt. Folytonos időfejlődés esetén az XX [2] és XY [3] spinláncmodellekben van eredmény, melyek szabad fermionokra képezhetők. A felhasznált módszer egy korrelációs mátrixon alapszik és más modellekben nem elérhető.

A cél a lineáris időfejlődés bizonyítása lenne legalább egy másik egyszerű kvantumáramkörben, de lehetőség szerint egy folytonos idejű modellben is.

4. Publikációk

- M. Borsi and B. Pozsgay, „Remarks on the construction and the ergodicity properties of dual unitary quantum circuits (with an appendix by Roland Bacher and Denis Serre),” 2022. arXiv:2201.07768 [quant-ph]
- M. Borsi, B. Pozsgay, and L. Pristiyák, „Current operators in integrable models: a review,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2021, p. 094001, sep 2021. arXiv:2103.12160 [cond-mat.stat-mech]

5. Tanulmányi tevékenység

Elvégzett kurzusok:

- A részecskefizika kísérleti módszerei (FIZ/2/138)

6. Konferencia-részvétel

A félév során a Student Workshop on Integrability 2022 konferencián vettem részt, ahol "Ergodicity of dual unitary permutation circuits" címmel tartottam előadást. Részt vettem továbbá a Budapest Integrability Day eseményen, valamint a heti rendszerességgel megrendezett nemzetközi Budapest Integrability szemináriumon.

7. Egyéb tevékenység

A félév során a Kvantummechanika B gyakorlatot tartottam konzultációs jelleggel.

A 2021/2022 tanévre ÚNKP pályázatot nyertem el. A kutatási munka eredményeit az idén megjelent cikkünkben közzé tettük, valamint konferencia-előadást tartottam belőle a Student Workshop on Integrability 2022 eseményen.

Hivatkozások

- [1] V. Alba, J. Dubail, and M. Medenjak, „Operator entanglement in interacting integrable quantum systems: the case of the rule 54 chain,” *Physical review letters*, vol. 122, no. 25, p. 250603, 2019.
- [2] J. Dubail, „Entanglement scaling of operators: a conformal field theory approach, with a glimpse of simulability of long-time dynamics in 1+ 1d,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 23, p. 234001, 2017.
- [3] I. Pižorn and T. Prosen, „Operator space entanglement entropy in x y spin chains,” *Physical Review B*, vol. 79, no. 18, p. 184416, 2009.