

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Tanári TDK Dolgozat



Tóth Ábel  
Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium

## **Lépcsőn pattogó labda vizsgálata**

Témavezető:  
Tél Tamás  
ELTE, Elméleti Fizika Tanszék

## **Absztrakt**

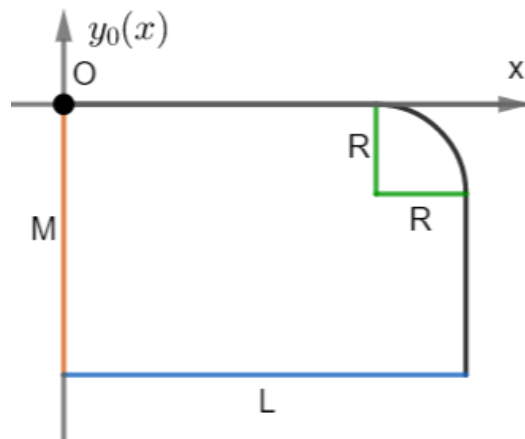
Ismert probléma, hogy egy labda szögletes lépcsőn történő pattogása összetett, de nem kaotikus. Dolgozatunk tárgya, egy ponszerű labda kiterjedt, körív alakú sarokkal rendelkező lépcsőn lefelé pattogó mozgása. Először matematikai háttérrel adunk a folyamatnak, analitikus képleteket, illetve numerikus eljárást nyújtva, melyekkel rekurzívan meghatározható a labda mozgása. A kapott képletekből számítógép segítségével modellezzük a mozgást, és megvizsgáljuk, a szögletes lépcső esetét egy kis méretű sarokkal kiegészítve kapunk-e káoszra utaló jeleket. A labda fázisterét különböző méretű sugarakra, és különböző konstans értékű, majd változó értékű ütközési együtthatókra vizsgáljuk meg.

## 1. Bevezetés

Egy osztrák tankönyv [1] kaotikus mozgásra felhossa példának a lépcsőn pattogó labda mozgását. Ezt az állítását tényként közli, alá semmivel sem támasztja. Ennek a tézisnek igazságtartalmát kívánták megvizsgálni néhány éve [2] szerzői, akik megállapították, hogy - szögletes lépcső esetén - a mozgás ugyan összetett, de nem kaotikus. A cikkben kétdimenziós modellben pontszerű, rugalmas labdát vizsgáltak 1-nél kisebb ütközési együtthatóval. Mi, egy lekerekített sarkú lépcsőn kívánjuk minél áthatóbban megvizsgálni egy pontszerű labda mozgását, majd megállapítani, hogy a szórófelületként működő kerek sarok mennyiben módosítja a helyzetet, és milyen esetekben vezet kaotikus mozgáshoz, ha az egyáltalán előfordul.

## 2. A lépcső

Tekintsünk egy jobbra lejtő, hosszú lépcsőt az alábbi modell alapján: legyen egy lépcsőfok egy lekerekített sarkú téglalap, melynek hossza  $L$ , magassága  $M$ , és a „lekerekítés” úgy történik, hogy a jobb felső sarok helyett egy  $R$  sugarú negyedkörív található (1. ábra). Egy lépcsőfok  $y_0(x)$  függvénye a lépcsőfok tetejének bal oldaláról mint origóból nézve az alábbi összefüggéssel adható meg:



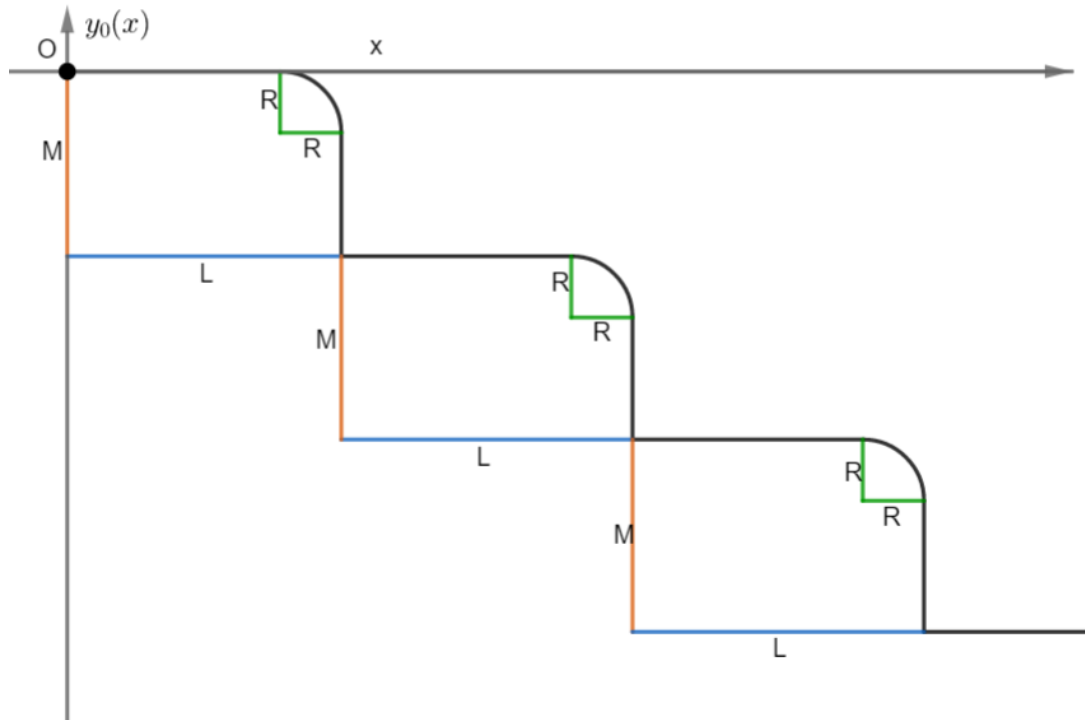
1. ábra: A lépcsőfok  $y_0(x)$  alakja (fekete görbe)  $M$  magassága, és  $L$  szélessége alapján. A lekerekítés egy  $R$  sugarú negyedkörív alakját írja le.

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq L - R, \\ \sqrt{R^2 - (L - R + x)^2} - R, & \text{ha } x > L - R, \end{cases} \quad (1)$$

ahol  $R < L$ . Ez természetesen kiterjeszthető, és az origóból megadható a teljes lépcső:

$$y_0(x) = \begin{cases} -NM, & \text{ha } LN < x \leq L(N + 1) - R, \\ -NM + \sqrt{R^2 - (L - R + x)^2} - R, & \text{ha } L(N + 1) - R < x \leq L(N + 1), \end{cases} \quad (2)$$

minden  $N \geq 0$  egész számra (2. ábra). Az egyszerűség kedvéért tekinthetjük mindig az origót a legfelső lépcsőfok kezdőpontjának, hiszen úgysem lesz szükségünk az origó feletti lépcsőfokokra.



2. ábra: A teljes lépcső  $y_0(x)$  alakja. Az origó a felső lépcsőfok kezdőpontja.

### 3. A labda mozgása

Tegyük egy pontszerűnek tekinthető labdát a legfelső lépcsőfokra, az  $(x_0; y_0(x_0))$  koordinátájú pontra, ahol  $x_0 < L$ , s adjunk neki  $u_0 > 0$  vízszintes irányú és  $v_0 > 0$  függőleges irányú sebességet. A homogén gravitációs térben a labda egy parabola pályát fog leírni, majd leérkezik egy lépcsőfokra (3. ábra). Ez a lépcső  $N_0$  lépcsőfokkal van lejjebb, mint az, ahonnan indult. (Ha ez ugyanaz lenne, mint ahonnan elindult, akkor  $N_0 = 0$ ).

A lépcsőről visszapattanva a tökéletesen rugalmas ütközéshez képest a  $k < 1$  és  $j < 1$  függőleges, illetve vízszintes ütközési együttható következtében a felületre merőleges irányú komponense  $k$ -szorosára változik, a felülettel párhuzamos komponense  $j < 1$  - szeresére csökkent. A labda mozgását célszerű úgy követnünk, hogy mindig az ütközés pillanatában tekintünk rá, a sebességeket közvetlenül az ütközés után rögzítjük. Érdemes az új origót annak a lépcsőfoknak a kezdőpontjára helyezni, ahol az  $n$ . ütközés történik. Így a labda koordinátái  $(x_n; y_0(x_n))$ , a függőleges és vízszintes irányú sebessége  $v_n$  és  $u_n$ . Nevezzük az egyszerűség kedvéért  $y_0(x_n) - t$   $y_n$ -nek, így általánosan a labdát jellemző adatok az  $n$ . ütközésben:  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $u_n$  és  $v_n$ . Célszerű a  $t_n$  időváltozót is meghatározni, amely az  $n$ . és  $n+1$ . lepattanás között eltelt időt mutatja. Így két változó van, amely a labda  $n$ . és  $n+1$ . lepattanása közötti szakaszt jellemzi,  $t_n$  és  $N_n$ .

### 4. A mozgás követése

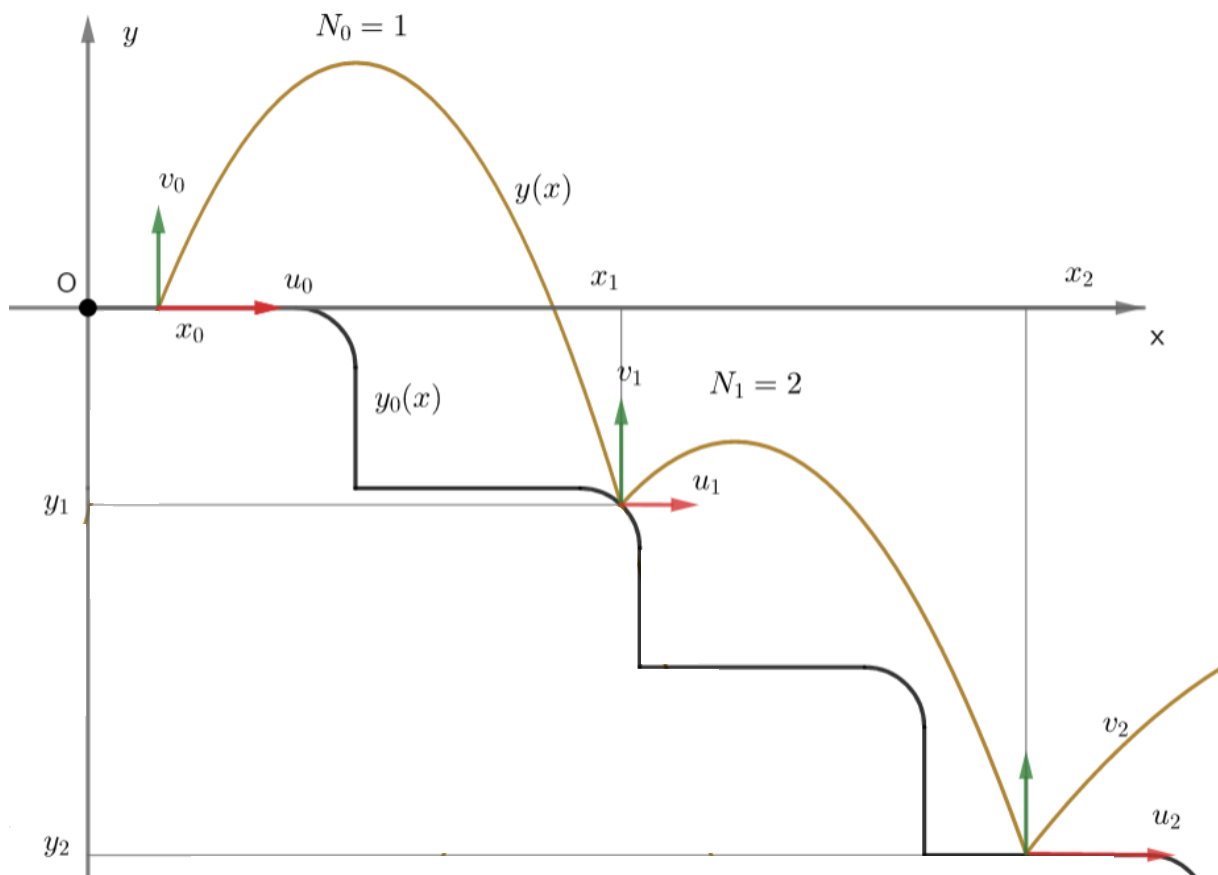
#### A) Általános gondolatok

Célunk, hogy kapcsolatot találjunk az  $n$ . és az  $n+1$ . ütközés adatai között. Vezessünk be ideiglenesen egy folytonos  $t$  változót is, mely az  $n$ . pattanás óta eltelt időt jelenti. A módszer, amellyel meghatározzuk a következő lepattanás helyét, ezen az időváltozón alapszik. Ennek a

$t$  változóban a függvényében megadjuk az  $n$ . ütközés után létrejövő ferde hajítás során a labda  $x(t)$  és  $y(t)$  koordinátáját, és a lépcső labdával megegyező  $x(t)$  helyen lévő  $y_0(t)$  magasságát. Az  $n+1$ . ütközés akkor történik meg, amikor először egyezik meg  $y(t)$  és  $y_0(t)$ . A repülés  $t_n$  idejét úgy kapjuk meg, hogy képezzük a  $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$  mennyiséget, mely eleinte pozitív, majd, amikor először előjelet vált, az a  $t_n$  idő, amelyre  $\Delta y(t_n) = 0$ . A pattanások között eltelt  $t_n$  idő segítségével kiszámolhatjuk a labda  $x_{n+1}$  és  $y_{n+1}$  helyadatait is. Ezek azt is meghatározzák, hogy hány lépcső felett repült át a labda, vagyis az  $N_n$  érték. Innen viszont a lépcső sarkára és lapjára pattanás esetében eltérő módszerrel kell meghatározni a lepattanás utáni  $u_{n+1}$  és  $v_{n+1}$  sebességkomponenseket. Így végül  $n$ . ütközés adataiból indulva megkapjuk az  $n+1$ . ütközés adatait. A mozgást az

$$(x_n, y_n, u_n, v_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})$$

leképezés alapján követjük. A mozgás folyamatára  $t_n$  és  $N_n$  jellemző, melyek a leképezés szempontjából fontos segédmennyiségek.



3. ábra: A labda pályájának alakja és jellemző adatai; az  $n$ . pattanás vízszintes és függőleges helye  $x_n$  és  $y_n$ , a közvetlenül pattanás utáni függőleges, illetve vízszintes sebessége  $u_n$  és  $v_n$ , az  $n$ . és  $n+1$ . pattanás között átugrott lépcsők száma  $N_n$ .

### B) $t_n$ , $N_n$ és az új helykoordináták számolása

Az  $n$ . ütközés után az origótól mért vízszintes távolsága:

$$x(t) = x_n + u_n t. \quad (3)$$

A labda függőleges elmozdulása az  $n$ . pattanás óta:

$$y(t) = y_n + v_n t - \frac{g}{2} t^2, \quad (4)$$

ahol  $g$  a gravitációs gyorsulás

A lépcső  $y_0(t)$  függvényét úgy kapjuk, hogy az  $y_0(x)$  függőleges koordinátát az  $x = x_n + u_n t$  helyen vesszük, azaz  $y_0(t) = y_0(x(t))$ , ami (3) alapján:

$$y_0(t) = \begin{cases} -NM, & \text{ha } LN < x_n + u_n t \leq L(N+1) - R, \\ -NM - R + \sqrt{R^2 - (L - x_n - u_n t)^2}, & \text{ha } L(N+1) - R < x_n + u_n t \leq L(N+1). \end{cases} \quad (5)$$

Itt  $N$  az a mennyiség, amely azt mutatja meg, hogy  $t$  idő alatt mennyi lépcső felett repült át a labda. A mozgás elején,  $t = 0$ -ban az értéke 0, majd minden egyes alkalommal, amikor  $\frac{x(t)}{L}$  egész része nő,  $N$  is vele növekszik. Végül  $t = t_n$  időpillanatban, vagyis az  $n+1$ . pattanás pillanatában  $N = N_n$ .

$y_0(t)$  értéke  $t = 0$ -ra megegyezik  $y_n$ -nel, ugyanis ekkor  $N = 0$  és (1) alapján:

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_n \leq L - R, \\ \sqrt{R^2 - (L - R + x_n)^2} - R, & \text{ha } x_n > L - R. \end{cases} \quad (6)$$

Az  $n$ . és  $n+1$ . pattanás között eltelt  $t_n$  idő az a legkisebb pozitív időérték, amelye:

$$y(t_n) = y_0(t_n) \quad (7)$$

Ezt az egyenletet általában csak numerikusan tudjuk megoldani.  $t_n$  ismeretében az  $n+1$ . ütközés koordinátái (az eredeti koordinátarendszerben):

$$x_{n+1} = x_n + u_n t_n, \quad y_{n+1} = y_n + v_n t_n - \frac{g}{2} t_n^2. \quad (8)$$

Az átvigrott lépcsők  $N_n$  számát meghatározhatjuk abból, hogy az  $y_{n+1}$  hány  $M$  lépcsőfok magassággal van az origó alatt. Ez az az  $N$  érték, amely  $t = t_n$ -re az (5) összefüggésben érvényes. Úgy is gondolhatunk rá, hogy  $x_{n+1}$  hány  $L$  lépcsőfok hosszal van az origótól jobbra, így  $x_{n+1}$  ismeretében  $N_n$  megkapható úgy is, hogy  $\frac{x_{n+1}}{L}$  egész részét vesszük:

$$N_n = \left[ \frac{x_{n+1}}{L} \right] \quad (9)$$

Ezután átváltunk az új koordinátarendszerbe, melynek középpontja annak a lépcsőfoknak a bal felső pontja, ahová a labda érkezett. Ebben a koordinátarendszerben mérjük  $x_{n+1}$  és  $y_{n+1}$ -et, amit a (7) értékekből az alábbi transzformációval határozhatunk meg:

$$x_{n+1} \rightarrow x_{n+1} - LN_n, \quad y_{n+1} \rightarrow y_{n+1} - MN_n \quad (10)$$

### C) Az új indulási sebességek számolása

Az eltelt idő ismeretében a közvetlenül lepatanás előtti sebességkomponensek:

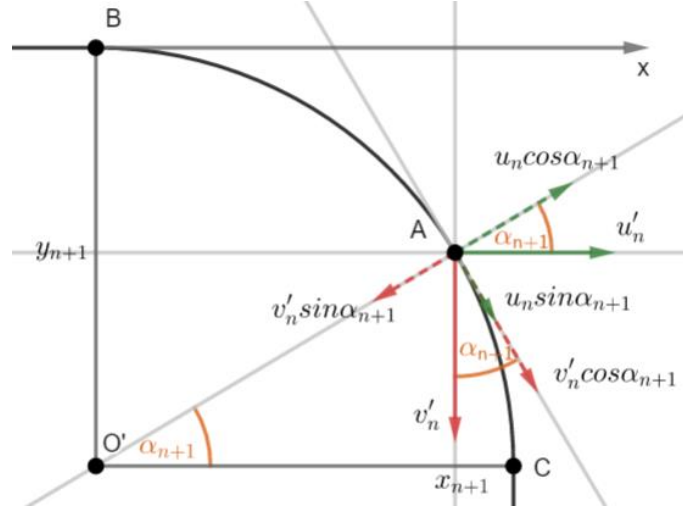
$$u_n' = u_n, \quad v_n' = v_n - g t_n.$$

Ezekből  $u_{n+1}$  és  $v_{n+1}$  számolása attól függően más, hogy a labda görbült felületre, vagy lapra pattan-e, így a két esetet külön kell tekinteni.

Ha a labda egy lépcsőfok lapjára pattan, vagyis  $x_{n+1} \leq L - R$ , akkor az ütközési tényezők alapján egyszerűen:

$$u_{n+1} = ju_n', \quad v_{n+1} = -kv_n'. \quad (11)$$

Nézzük ezután a sarokra pattanás esetét, amikor is  $x_{n+1} > L - R$ . A geometriai elrendezést a 4. ábra mutatja.



4. ábra: A geometriai elrendezés, a becsapódás előtti vízszintes és függőleges sebességkomponensek felbontása sugárirányúra és tangenciálisra

Legyen a leérkező labda az A ponton, legyen  $O'$  a sarkot jelentő negyedkörív középpontja, a körív felső és alsó végpontjai rendre B és C. Az  $AOC$  szög  $\alpha_{n+1}$  az alábbi módon számolható:

$$\alpha_{n+1} = \arccos\left(\frac{x_{n+1} - L + R}{R}\right). \quad (12)$$

Ahhoz, hogy a súrlódási, és ütközési tényezőket megfelelően használjuk, a lepattanás előtti  $u_n'$  vízszintes irányú és  $v_n'$  függőleges irányú sebességkomponensek helyett a  $v_r'$  sugárirányú, és a  $v_t'$  tangenciális komponenseket kell használni. A komponensekre bontás a 4. ábra alapján:

$$v_r' = v_n' \sin(\alpha_{n+1}) - u_n' \cos(\alpha_{n+1}), \quad v_t' = v_n' \cos(\alpha_{n+1}) + u_n' \sin(\alpha_{n+1}).$$

Ezekből  $k$  és  $j$  használatával megkapható a lepattanás utáni sugár, illetve érintő irányú sebesség:

$$v_r = -kv_r', \quad v_t = jv_t'.$$

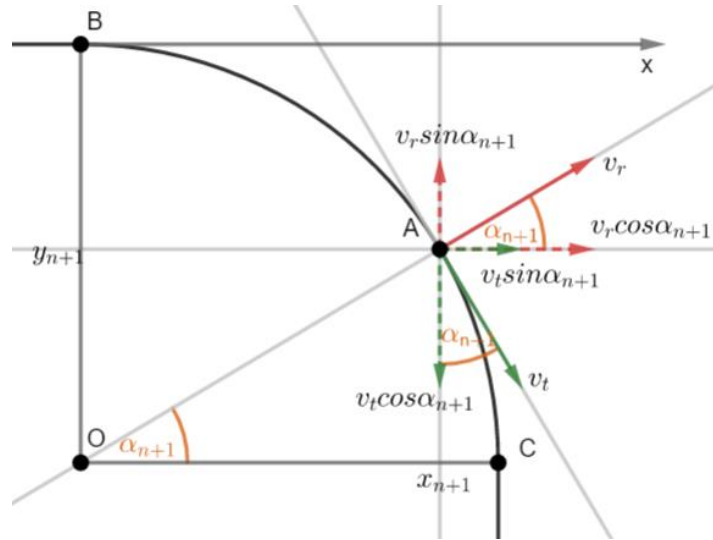
Ezeket a sebességeket az 5. ábra alapján visszaalakíthatjuk vízszintes és függőleges irányúra, megkapva  $u_{n+1}$  és  $v_{n+1}$  értékeit:

$$u_{n+1} = v_r \cos(\alpha_{n+1}) + v_t \sin(\alpha_{n+1}),$$

$$v_{n+1} = v_r \sin(\alpha_{n+1}) - v_t \cos(\alpha_{n+1}).$$

$v_r$  és  $v_t$  értékeket behelyettesítve:

$$u_{n+1} = (-kv_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1}) + ku_n' \cos^2(\alpha_{n+1})) \\ + (jv_n' \sin^2(\alpha_{n+1}) - ju_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})),$$



5. ábra: A becsapódás utáni sugárirányú és tangenciális sebességkomponensek visszaalakítása vízszintesre és függőlegesre

$$v_{n+1} = (-kv_n' \sin^2(\alpha_{n+1}) + ku_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})) + (ju_n' \cos^2(\alpha_{n+1}) - jv_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})).$$

$u_n'$  és  $v_n'$  szerint csoportosítva, és  $\sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1}) = \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2}$  azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n' \left( k \cos^2(\alpha_{n+1}) - j \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2} \right) + v_n' \left( j \sin^2(\alpha_{n+1}) - k \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2} \right), \\ v_{n+1} &= u_n' \left( k \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2} + j \cos^2(\alpha_{n+1}) \right) - v_n' \left( k \sin^2(\alpha_{n+1}) + j \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

## 5. Dimenziótlan alak

A fent megadott képletek átírhatók egyszerűbb alakba is, mely kevesebb változótól függenek, például a lépcső hossza és magassága helyett csak az  $m = M/L$  meredekségétől. Ehhez  $L$ -lel leosztjuk az összes hosszúság dimenziójú egyenletünket, és az így kapott  $L$ -lel osztott hosszparamétereket újradefiniáljuk, mint az  $L$  lépcsőfok-hossz egységében mért dimenziótlan távolság. Így a lépcső magassága  $m = M/L$ , a negyedkörív sugara  $r = R/L$  és  $x_n$  és  $y_n$  is  $L$  egységében van mérve. Hasonlóképpen érdemes sebességegységet is megadni, ehhez  $u_0$ -t választjuk, hiszen így eggyel kevesebb kezdőértéke van a labdának. A fent tárgyalt eljárásnak megfelelően most leosztjuk  $u_0$ -lal a sebesség dimenziójú egyenleteket, vagyis  $u_n$  és  $v_n$ , és a részeredményként kapott  $v_n'$ ,  $v_t$  stb értékek mind  $u_0$  egységében vannak mérve. Ezekből az is következik, hogy az idő mértékegysége  $t_e = L/u_0$ . Eddig még nem beszéltünk  $g$ -ről, amely szintén egy fontos paraméter. Mivel  $u_0^2/L$  gyorsulás mértékegységű, a  $g$ -nek megfelelő dimenziótlan mennyiség  $H = gL/u_0^2$ . Ez  $u_0$ -t is tartalmazza, tehát a vízszintes kezdősebességet is jellemző paraméter. A szemléletes jelentése az, hogy az  $r = 0$  esetben a legfelső lépcsőfok sarkából elindulva a következő lépcsőfok hosszának  $\sqrt{2m/H}$ -szorosánál pattan le. Ezt az alábbi módon láthatjuk be, a dimenziós írásmóddal kezdve: a lépcsőfok  $M$  magasságból a labda  $t = \sqrt{2M/g}$  idő alatt esik le, ami alatt  $u_0$  sebességgel  $\sqrt{2Mu_0^2/g}$  vízszintes utat tesz meg. Ez a lépcsőfok  $L$  hosszának  $\sqrt{2Mu_0^2/(gL^2)} = \sqrt{2m/H}$ -szorosa. A



később használt  $m = 0.5$ ,  $H = 4$  értékekkel a labda pl. a következő lépcsőfok közepénél pattan le, ez a választás, tehát viszonylag kis vízszintes kezdősebességnek felel meg.

Az egész mozgást a

$$k, \quad j, \quad m = \frac{M}{L}, \quad r = \frac{R}{L}, \quad H = \frac{gL}{u_0^2}.$$

paraméterek jellemzik. A lépcső alakját dimenziótlan formában is a 2. ábra adja meg, csak a lépcsőfokok hossza 1, magasságuk  $m$ , a görbület sugara  $r$ . A (4) kifejezés megfelelője pl.  $y(t) = y_n + v_n t_n - \frac{H}{2} t_n^2$ , ahol  $y_n < r$ . A 6. fejezetben bemutatott numerikus szimuláció is ebben a dimenziótlan jelölésben kéri, illetve adja meg az értékeket.

## 6. Analitikus összefüggések két ütközés közt

Ha a labda két lépcsőfok vízszintes lapja között pattan, akkor egzakt, analitikus összefüggések is felírhatók, s a mozgás ezek alapján követhető, ahogy [2]-ben megmutatták. A lenti számolások elvégzése akkor is segít, ha a labda görbületre esik, hiszen, ahogy látni fogjuk, annyival kisebb szakaszon kell majd numerikus számolást végezni.

Tekintsünk a vizsgálandó lépcső helyett egy olyat, amely ahhoz mindenben hasonlít, de az alatt a lépcsőfok alatt, melyen az  $n$ . pattanás történik, semelyik lépcsőfoknak sincs lekerekítve a sarka, vagyis ott  $r = 0$ , azaz nem tud görbületre pattanni a labda. Ekkor  $y_0(x)$  az alábbi dimenziótlan formára egyszerűsödik:

$$y_0(x) = -mN, \quad \text{ha } N < x \leq N + 1. \quad (14)$$

Ezt minden  $N > 1$  egész számra felírjuk, hiszen a 0. lépcsőfokon kívül (amelyikről indul) mindegyik lépcsőfok szögletes.

A számolás megkönnyítésének érdekében tegyük fel, hogy ismerjük  $\bar{N}_n$  értékét, ami azt mondja meg, hogy hány szögletes lépcsőfokon repül át a labda az  $n$ . pattanás után, és végezzük el ennek alapján a fenti számításokat.

Határozzuk meg a két ütközés között eltelt dimenziótlan időt:

$$y_n + v_n t_n - \frac{H}{2} \bar{t}_n^2 = -m\bar{N}_n. \quad (15)$$

Itt  $\bar{t}_n$  a szögletes lejtőhöz tartozó repülési idő. Az  $y_n$  mennyiség lehet 0, vagy egy tetszőleges  $r$ -nél kisebb abszolút értékű negatív szám is lehet. Ha ez így van, az azt jelenti, hogy az  $n$ . pattanás a lekerekített részre esik. Az egyenlet pozitív megoldása:

$$\bar{t}_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n}{H}. \quad (16)$$

ebből a becsapódás előtti függőleges és vízszintes sebesség a szögletes lépcsőn:

$$\bar{v}_n' = v_n - H\bar{t}_n = -\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)}, \quad \bar{u}_n' = u_n \quad (17)$$

Az  $u_n$  vízszintes sebességről eddig nem esett szó ebben a fejezetben, de a korábbi megállapítások ugyanúgy érvényesek itt is, nevezetesen, hogy két pattanás között az értéke sosem változik.

Az eltelt idő ismeretében a (3) egyenletből számolható az  $x$  koordináta:

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + u_n \bar{t}_n = x_n + \frac{u_n}{H} \left( \sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right), \quad (18)$$

ahol  $\bar{x}_{n+1}$  az  $n+1$ . ütközés koordinátája a szögletes lépcsőn.

A dimenzióatlanított (9) alapján  $\bar{N}_n$  megkapható, mert:

$$\bar{N}_n = \left\lceil x_n + \frac{u_n}{H} \left( \sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right) \right\rceil. \quad (19)$$

Az egyenletnek nincsen explicit megoldása, de mivel tudjuk, hogy  $\bar{N}_n$  egész, ezért kiértékeljük (18)-at  $\bar{N}_n = 1, 2, 3$  stb egész számokra, hogy azonosságot kapunk-e. A legkisebb szám, amely kielégíti az egyenletet, lesz  $\bar{N}_n$  megoldás.

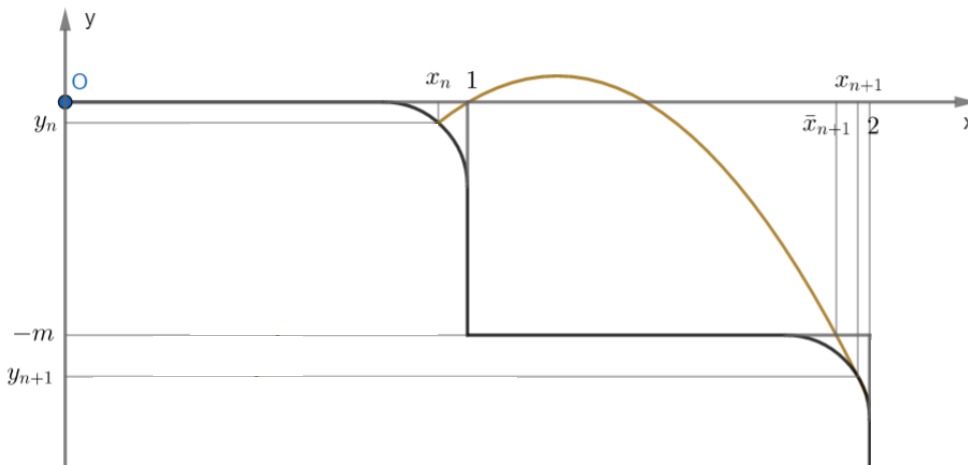
Az új koordinátarendszerbe átlépéshez a (18)-ból számolt értékre elvégezzük a (10)-nek megfelelő transzformációt, ami az

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + \frac{u_n}{H} \left( \sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right) - \bar{N}_n \quad (20)$$

dimenzióatlan alakra vezet. Most már tudjuk, hogy hol pattanna le a labda egy nem lekerekített lépcsőn. A lekerekített lépcső esetén kapott  $\bar{x}_{n+1}$  nem feltétlenül egyezik meg a lekerekítetlen lépcsőn érvényes  $x_{n+1}$ -gyel, ezt mutatja a 6. ábra.

Ha az adódik, hogy a (20)-ban számolt  $\bar{x}_{n+1} < 1 - r$ , akkor  $\bar{x}_{n+1}$  a tényleges lepattanás helye:  $x_{n+1} = \bar{x}_{n+1}$  (és  $t_n = \bar{t}_n$ ,  $N_n = \bar{N}_n$ ).  $x_{n+1}$ -re tehát egy zárt képletet kapunk, amely az  $n$ . lepattanás adataiból megadja az  $n+1$ . pattanás adatait. Egyben  $y_{n+1} = 0$ , hiszen lapra pattant a labda. A (16)-ból kifejezett lepattanás előtti sebességeket behelyettesítve (11)-be megkapjuk az  $n+1$ . sebességeket is:

$$v_{n+1} = k \sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)}, \quad u_{n+1} = j u_n \quad (21)$$



6. ábra:  $\bar{x}_{n+1}$  és  $x_{n+1}$  nem feltétlenül egyezik meg,  $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$  esetén  $\bar{x}_{n+1} < x_{n+1}$

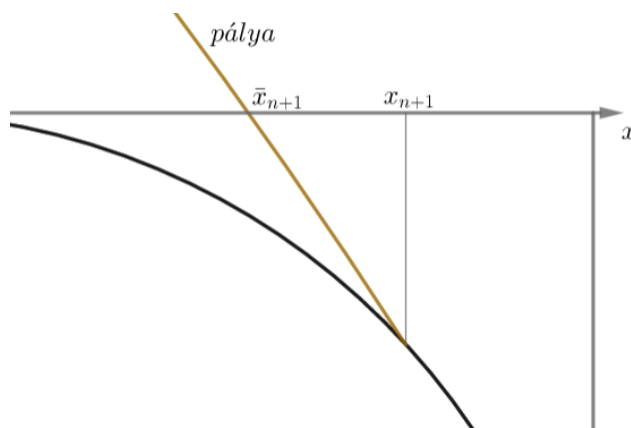
Ha (18)-ban számolt  $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$ , akkor nem tudunk zárt, analitikus képleteket adni, így numerikus módszerrel határozzuk meg a labda lepattanás utáni adatait.

### 7. Numerikus algoritmus

Az analitikus összefüggések segíthetnek, de nem tudnak minden esetben megoldást nyújtani. Ha a labda görbületre pattan, akkor mindenképpen kell numerikus számolást végezni. A labda pályájának és lépcső alakjának viszonyától függően három esetet különítünk el: ha a labda azon a lépcsőfokon pattan le, amelyikre az 6. fejezetben meghatározott  $\bar{x}_{n+1}$  kerül, ha a labda egy másik lépcsőfokon pattan le, mint amelyikre meghatároztuk  $\bar{x}_{n+1}$  értékét, illetve, ha a labda egy lépcsőfokról ugyanannak a lépcsőfoknak a görbületére pattan. Az első két esetben így is segítenek az analitikus összefüggések, hiszen nekik köszönhetően rövidebb szakaszon kell numerikus számolást végezni, csak az elképzelt, szögletes lépcső lapjai és a valódi görbült felületek között. A harmadik esetben viszont a következő lepattanás adatai meghatározására teljes mértékben numerikus számolásra kell hagyatkoznunk.

#### A) A labda $\bar{x}_{n+1}$ -hez tartozó lépcsőfokra pattan le

Ez az eset akkor állhat fent, ha miután elvégeztük az analitikus számolást, és már áttértünk az új koordináta-rendszerbe (hiszen  $\bar{x}_{n+1}$ -re vonatkozóan (20)-ban már elvégeztük az ehhez szükséges, (10)-nek megfelelő transzformációt,  $\bar{y}_{n+1}$  értéke pedig az új koordináta-rendszerben definíció szerint 0), azt kaptuk, hogy  $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$ . A labda pályáját, tehát az  $(\bar{x}_{n+1}, 0)$  helytől az  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  helyig kell vizsgálnunk. Azt az esetet nézzük, ahol mindeközben a labda nem pattant át egy másik lépcsőre, vagyis a vizsgált szakaszon  $N = 0$ . Ekkor  $\bar{x}_{n+1}$  és  $x_{n+1}$  viszonyát a 7. ábra mutatja.



7. ábra:  $\bar{x}_{n+1}$  és  $x_{n+1}$  koordináták viszonya, ha a labda az  $\bar{x}_{n+1}$ -hez tartozó lépcsőfokra pattan le. A fekete színnel jelöltük a lépcső görbületét, szürkével a képzeletben kiegészített szögletes lépcsőfokot.

Vizsgáljuk a labda lépcső feletti magasságát egy adott időpillanatban, mégpedig úgy hogy a (7)-ben számolt  $(\bar{x}_{n+1}, 0)$  helyen érvényes sebességeket tekintjük kezdősebességeknek, és ezekből képezzük a  $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$  mennyiséget, ahol  $t$  az  $(\bar{x}_{n+1}, 0)$  helyzetből való elindulása óta eltelt időt jelöli.

$x(t)$  a megfelelő mennyiségek behelyettesítésével, (3) alapján:

$$x(t) = \bar{x}_{n+1} + u_n t. \tag{22}$$

Az  $y(t)$  koordináta, (4) alapján, a  $v$  sebesség helyére a (17)-ben számolt  $\bar{v}_n'$  értéket helyettesítve, az  $\bar{y}_{n+1} = 0$  szinttől mérve:

$$y(t) = \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2. \quad (23)$$

Mivel  $1 - r < \bar{x}_{n+1} < 1$ , és az (5)-ben szereplő  $N$  értéke definíció szerint 0:

$$y_0(t) = -r + \sqrt{r^2 - (1 - r + \bar{x}_{n+1} + u_n t)^2}. \quad (24)$$

Ebből a  $\Delta y(t)$  függvény:

$$\Delta y(t) = \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2 + r - \sqrt{r^2 - (1 - r + \bar{x}_{n+1} + u_n t)^2}. \quad (25)$$

Ennek a függvénynek az értéke addig pozitív, amíg a labda a lépcső felett van, és amikor előjelet vált, akkor történik a visszapattanás.

Az algoritmus ennek a függvénynek az értékét képezi a  $t = 0, dt, 2dt$  stb. pillanatokban, ahol  $dt$  egy kis időlépés. Az utolsó beviteli értéket, amire még pozitív a függvény értéke, nevezzük  $T$ -nek. Ha elegendően kicsinek választjuk meg  $dt$  értékét, akkor  $x(T) \approx x_{n+1}$  és  $y(T) \approx y_{n+1}$ , vagyis (22) és (23) jó közelítéssel megadják a következő pattanás helykoordinátáit.

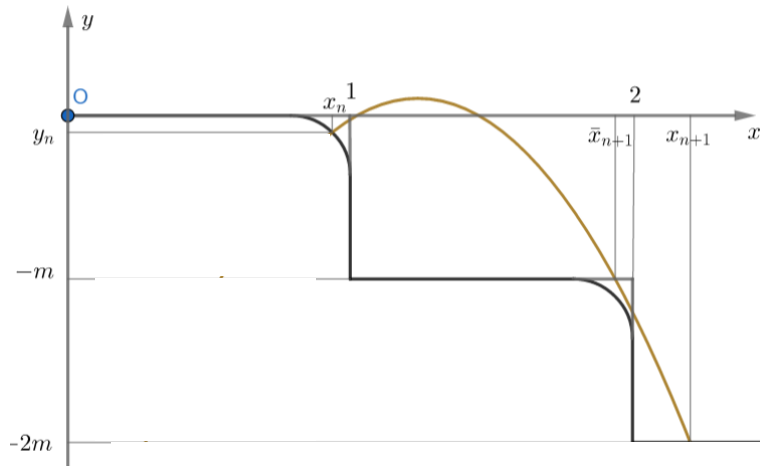
Ha megtaláltuk a labda  $x_{n+1}$  és  $y_{n+1}$  koordinátáit, akkor először a becsapódási sebességeket számoljuk ki. Tudva, hogy az  $(\bar{x}_{n+1}, 0)$  helyen a sebességkomponensek a (18) szerint számolható  $\bar{v}_n'$  és  $\bar{u}_n'$  értékek, illetve, hogy azóta  $T$  idő telt el, a becsapódási sebességek:

$$v_n' = \bar{v}_n' - HT, \quad u_n' = \bar{u}_n' = u_n$$

lesznek. Ezeket az értékeket (14)-be helyettesítve (mely ugyanilyen alakú a dimenziótlan írásmódban is) megkapjuk a visszapattanás utáni  $v_{n+1}$  és  $u_{n+1}$  sebességértékeket.

### B) A labda nem az $\bar{x}_{n+1}$ -hez tartozó lépcsőfokra pattan le

Előfordulhat, hogy (19) ad egy  $\bar{N}_n$ -t, ahol lepattanna szögletes lépcső esetén, de a labda éppen elrepülne a lekerekített rész felett. Egy ilyen esetet mutat a 8. ábra. Ezt úgy küszöbölhetjük ki, hogy először áttérünk az új koordinátarendszerbe, (mely a kiszámolt  $\bar{x}_{n+1}$  értékhez tartozik,) aztán a numerikus algoritmussal, amely a (25)-ben számolt  $\Delta y(t)$  érték előjelét vizsgálja különböző  $t$  időpillanatokra, ugyanarra az időpillanatokra a (22)-ben számolt  $x(t)$  értékét is ellenőrizzük, és ha ez az érték meghaladja az egyet, akkor  $\bar{N}_n$  értékét eggyel növeljük, hiszen még egy lépcsőfok felett átrepült. A növelt érték szinte mindig már a valódi  $N_n$ , de ha kell, a (19) egyenletbe tovább helyettesítjük az  $\bar{N}_n$  értékeket, amíg meg nem találjuk a megoldást (ez csak nagyon ritkán szükséges). Innen a leírtak szerint folytatjuk a számolást, az újonnan kapott  $\bar{N}_n$  értékkel elvégezzük a (22)-(25) számolásokat, majd az új  $\bar{x}_{n+1}$  értékének megfelelően az előző fejezet vége, vagy a jelenlegi fejezet tartalma szerint megkaphatjuk  $x_{n+1}$  koordinátát is.



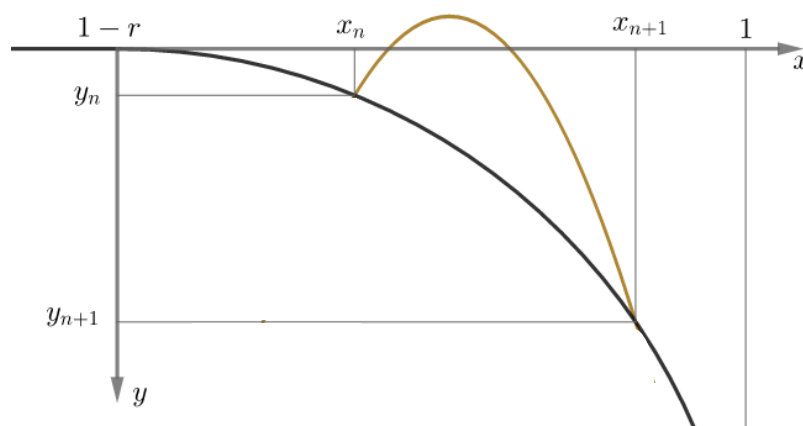
8. ábra: Előfordulhat, hogy  $\bar{x}_{n+1}$  meghatározása nem azon a lépcsőfokon történik, ahol a labda ténylegesen leesik.

### C) A labda lépcsőfok átugrása nélkül görbületre pattan

Mivel az analitikus összefüggések fejezetben a (14) egyenletben szereplő  $N$ -t 1-nél nagyobbak definiáltuk, nem néztük meg azt az esetet, amikor a labda arra a lépcsőfokra pattan,

ahonnan indult. (Ha a lépcső lapos részéről indulva teszi ezt, akkor felírhatjuk (14)-(20) összefüggéseket  $\bar{N}_n = 0$  esetben is, ilyenkor a B) és C) részekhez hasonlóan segítségünkre lesz az analitikus számolás, majd a B)-ben tárgyalt módon numerikusan meghatározhatók a következő lepattanás adatai.)

Ha a labda görbült felületről indul és lépcsőfok átugrása nélkül ugyanarra a görbületre pattan (9. ábra), akkor a pattanás egészében a numerikus számolásra kell hagyatkoznunk. Itt a labda már az  $n$ . lepattanáshoz tartozó koordinátarendszerben van, tehát az  $(x_n, y_n)$  helyről indult  $u_n$  és  $v_n$  sebességgel, és természetesen az  $\bar{N}_n = 0$  esetet vizsgáljuk. Ennek megfelelően kicsit módosítani kell a (22)-(25) összefüggéseket.



9. ábra: Lehetséges, hogy a labda egy görbületről indulva ugyanarra a görbületre érkezik vissza. Ilyenkor nem kaphatunk  $\bar{x}_{n+1}$ -et, és pusztán numerikus módszerekkel jellemezzük a pattanást.

A pálya  $x(t)$  koordinátája az  $x_n, u_n$  kezdeti adatokkal:

$$x(t) = x_n + u_n t. \quad (26)$$

Az  $y(t)$  koordináta meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a labda  $y_n$  helyről indult, illetve, hogy  $v_n$  volt a kezdősebessége:

$$y(t) = y_n + v_n t - \frac{H}{2} t^2. \quad (27)$$

$y_0(t)$  számolásánál újra csak a korábbi  $\bar{x}_{n+1}$  értéket kell az itteni  $x_n$  kezdőértékre cserélni:

$$y_0(t) = -r + \sqrt{r^2 - (1 - r + x_n + u_n t)^2}. \quad (28)$$

Visszahelyettesítve a  $t = 0$  esetet, látható, hogy  $y_0(0)$ -ra (6)-nak megfelelő alakot kapunk, visszazakapva  $y_n$ -t.

Ezekből a módosult  $\Delta y(t)$  függvény:

$$\Delta y(t) = y_n + \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2 + r - \sqrt{r^2 - (1 - r + x_n + u_n t)^2}. \quad (29)$$

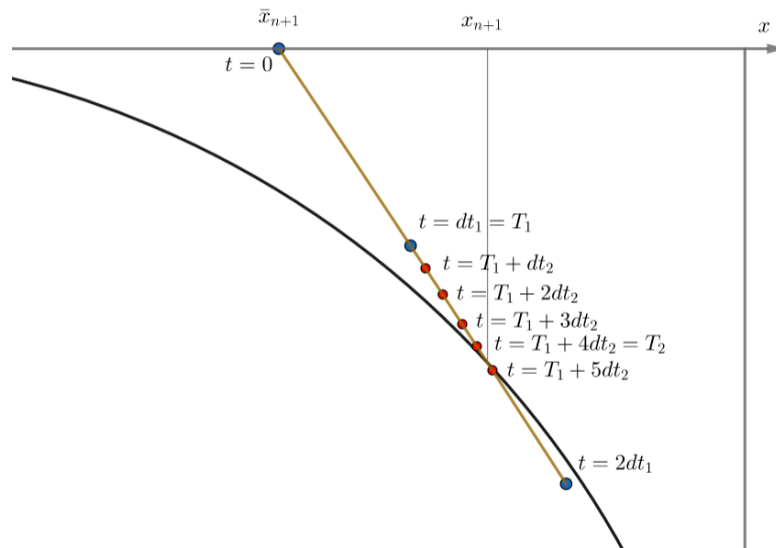
Ilyenkor tehát a numerikus algoritmust a (29) függvényre kell elvégeznünk, amelyre az ugyanúgy működik, mint a B)-ben tárgyalt esetre.

#### D) A numerikus algoritmus pontosítása

A módszert a B)-ben tárgyalt esetre mutatjuk be. Minél kisebbnek választjuk  $dt$ -t, annál pontosabb a közelítés, viszont ezzel megnő a számításigény. Ahhoz, hogy a gép gyorsan és pontosan végezze el a számolást, menet közben változtathatjuk  $dt$  értékét, és az egyre kisebb  $dt$  időlépéseknek megfelelően egyre pontosabb  $T$  értéket kapunk. Nevezzük az először választott  $dt$  értéket  $dt_1$ -nek, és az ezzel kapott  $T$  értéket  $T_1$ -nek. Miután megtaláltuk  $T_1$  értékét, az elsőre megválasztott  $dt_1$  segítségével, akkor csökkentjük  $dt_1$  értékét a tized részére, megkapva ezzel  $dt_2$ -t, és vizsgáljuk meg a függvényt a  $t = T_1, T_1 + dt_2, T_1 + 2dt_2$  stb pillanatokban, amíg meg nem találjuk az így képzett legnagyobb  $t$  értéket, amelyre  $\Delta y(t)$  még pozitív, ez legyen  $T_2$ . ( $T_1$ -nél kisebb időpillanatokot felesleges megvizsgálni, hiszen tudjuk, hogy  $T_1$  pillanatban  $\Delta y(t)$  még pozitív.) Ezután újra csökkenthetjük  $dt$  értékét,  $dt_2$ -ről annak tizedére,  $dt_3$ -ra és így tovább. Így kellően kevés idő alatt megfelelően pontos a numerikus számolás, az így kapott  $T_n$  értékre mondhatjuk, hogy  $x(T_n) = x_{n+1}$  és  $y(T_n) = y_{n+1}$ . A szimulációkban  $dt_1$  értékét a dimenziótlan időegység egy ezerötöd részének választjuk (néhány lépcsőfok nagyságú pattanás általában egy nagyságrendű dimenziótlan időt vesz igénybe), és  $n=11$ -ig folytatjuk az algoritmust, így numerikus pontosságunk  $10^{-14}$  nagyságrendű. Erre a nagy pontosságra azért van szükség, mert a görbület szóró tükröként működik, kaotikus viselkedést okoz, s káoszban a hibák feleződnek [3,4].

Az algoritmus jobb megértése érdekében gondoljuk el, hogy különböző időpontokban meghatározzuk a labda helyét, és megpróbáljuk kitalálni, hogy melyik pillanatban lesz éppen ott, ahol ütközik. Először megnézzük  $t = 0$ -ra, (ekkor a B)-ben és C)-ben tárgyalt esetben  $\bar{x}_{n+1}$  helyen, míg a D)-ben tárgyalt esetben  $x_n$  helyen van,) majd  $dt_1$  időközönként. Ha  $dt_1$  nagy, akkor néhány lépés után (a 9. ábrán két lépés után) jutunk az ütközési ponton túlra. Ekkor visszatérünk az eggyel korábbi időpillanatra, amit  $T_1$ -nek hívunk, és onnan számolunk tovább, az eredeti  $dt_1$  helyett, egy finomabb,  $dt_2$  időközt használva. Ezt is addig adjuk hozzá az eltelt időhöz, amíg egyszer csak átlépünk az ütközési ponton, és előjelet vált  $\Delta y$ , és megint visszatérünk az eggyel korábbi,  $T_2$ -nek nevezett időpillanathoz, és újra finomítunk  $dt$ -n. Az algoritmus a kívánt pontosság eléréséig folytatódik, az utoljára vizsgált hely, amely a  $T_n$

időpillanathoz tartozik, a labda lepattanásának  $x_{n+1}$  koordinátája, míg az  $y_{n+1}$  koordinátát az  $y(T_n)$  függvényérték adja meg. Ezt a gondolatot szemlélteti a 10. ábra.



10. ábra: A finomodó algoritmus szemléltetése a numerikus szakaszon  $n = 2$ -ig, a lépcső görbületére ránagyítva. Először balról jobbra a kék pontokat követjük, majd sorban a pirosakat. Az algoritmus meghatározza a labda lepattanásának  $x_{n+1}$  helyét.

### E) A szimulációnk nyelve és környezete

Szimulációnk Java nyelven íródott, egy processing nevű környezetben [5]. Azért esett erre a választásunk, mert ez egy felhasználóbarát szoftver, mely a grafikus ábrázolást nagyban megkönnyíti.

Felhasználóbarát volta már a működésén meglátszik. Az ebben a környezetben írt programok alapja egy draw() nevű függvény, mely automatikusan meghívódik minden frameben (ez általában másodpercenként hatvanat jelent, de természetesen állítható), így lehetővé téve ismétlődő, egymáshoz hasonló számolások gyors, egymás utáni elvégzését (a mi esetünkben a labda  $n$ . adataiból az  $n+1$ . adatainak kiszámolását) úgy, hogy mindeközben output kiadására (például a labda pályájának rajzolása, vagy egy függvény pontjainak kijelölése) és input befogadására (például kattintás érzékelése) is képes. Ehhez más környezetben külön függvények megírása lenne szükséges, ráadásul arra figyelve, hogy ezek a függvények egyszerre fussanak, de mégse zavarják egymást. A processing ezt automatikusan kezeli.

A felület másik előnye a grafikai ábrázolásokban rejlik. Számptalan beépített függvény segíti az esztétikus kirajzolást, és egyszerűen elérhető még a 3D ábrázolás is (bár ez nekünk most nem szükséges). A szakaszok, körívek, pontok, háromszögek, ellipszisek és még sok más alakzat kirajzolására megtalálható beépített függvény, és a vonalak vastagsága, színe, az alakzatok kitöltése, illetve a betűk színe, mérete és betűtípusa is egyszerűen állítható, s ezek következtében kitűnő választás szimulációk írására és prezentálására is.

A mutatott képek felbontása változó, de mindegyiknek legalább  $640 \times 390$ -es. A későbbi fázistereken  $x$  pontossága három tizedesjegyig,  $v$  pontossága 2 tizedesjegyig terjed. A szimulációban double típusú változókat (64 bit) és egy Jasmine nevű számolást sebességét gyorsító könyvtárat használtunk [6], ami azért is szükséges volt, mert a Processing egy nagy hátránya, hogy double típusú változókkal csak alapműveleteket tud végezni. A számábrázolás pontossága mindent összevetve a numerikus számolás  $10^{-14}$ -es pontosságával egyezik meg.

## 8. Eredmények

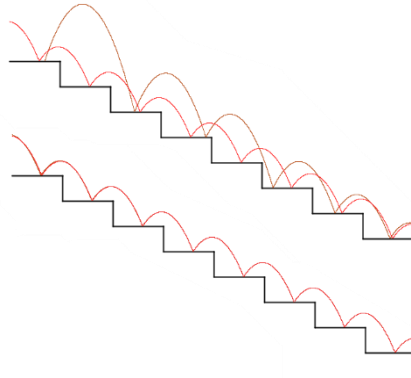
### A) A görbület hatása

$r = 0$  határesetben [2] cikk szerint elég nagy  $k$  értékekre a labda előbb-utóbb egy állandósult mozgást végez lefelé. Ez  $k$ -tól függően lehet periodikus és kváziperiodikus is. Először a periodikus, majd a kváziperiodikus esetet vizsgáljuk. Ahhoz, hogy a lehető legjobban bemutathassuk a kontrasztot a szögletes, és a görbülettel rendelkező lépcső között, a lehetőségek szerint a többi adatot a [2]-ben vizsgált eseteknek megfelelően vesszük fel, éppen ezért először mindent a  $j = 1$  esetben vizsgálunk, a többi standard érték:  $H = 4$  és  $m = 0.5$  és  $v_0 = 3$ , ha nem írunk mást ezek az érvényesek.

Mivel nem feltétlenül pattan görbületre a labda, és így nem feltétlenül lesz hatása a görbület jelenlétének, ezért sokszor mégis meg kell változtatnunk valamit. Mivel  $x_0$  értéke a cikk eredményei szerint a szögletes lépcsőnél nem befolyásolja a hosszú idejű mozgás jellegét, ezért erre esett a választásunk.

#### I) Periodikus pattogás

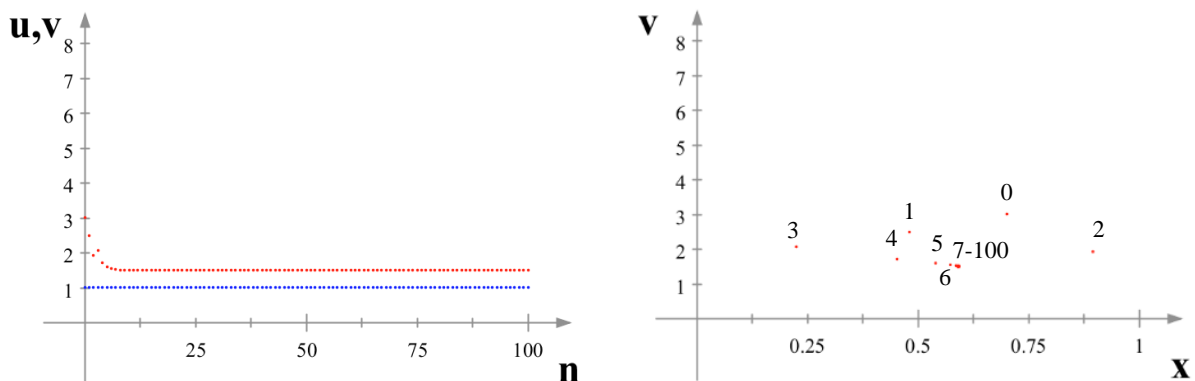
$r = 0$ -ra különböző, diszkrét  $k$  értékekre fordulhat csak elő teljesen periodikus pattogás, mi ezek közül a legegyszerűbbet, a mindig egy lépcsőfokot átugró mozgást nézzük, mely  $k = 0,6$  esetén fordul elő, ekkor viszont a kezdőértékektől függetlenül. Nézzük meg először ebben az esetben a labda mozgását, ezt mutatja a 11. ábra.



11. ábra: A labda pattogása a szögletes lépcsőn ( $r = 0$ )  $k = 0.6$ ,  $j = 1$  ütközési együtthatókkal  $H = 4$  és  $m = 0.5$ -re  $x_0 = 0.7$  és  $v_0 = 3$  kezdőfeltételekkel (arany színű vonal). Az alsó lépcsősoron a labda pályájának folytatása látható. A piros vonal a labda állandósult mozgását mutatja. Amint látható a 6. pattanás után már nem különíthető el a két vonal, vagyis beáll az állandósult mozgás.

A periodikus mozgás néhány pattanás után beáll, ekkor a  $v_n$  sebesség, és a lepattanás  $x_n$  helye is állandósul, ezt mutatják 12. ábrán az egyes lepattanásokhoz tartozó sebességkomponensek, illetve a mozgás fázisterét mutató diagramm. A fázister nem más, mint az egyes pattanások  $x_n$  és  $v_n$  adatainak egy diagrammon történő ábrázolása. Mivel  $j = 1$ , ezért a vízszintes sebesség konstans,  $u_n = 1$ , hiszen az  $u_0$  vízszintes kezdősebességgel dimenziótlanítottunk.

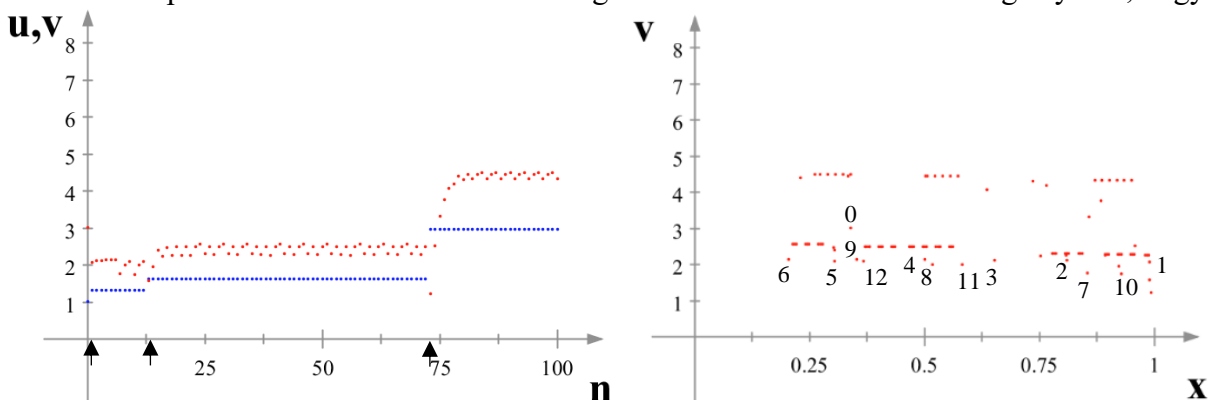




12. ábra: A lepattanásokhoz tartozó sebességkomponensek (a kék szín a vízszintes,  $u$ , a piros szín a függőleges,  $v$  sebességkomponenst jelöli) a lepattanás sorszámának függvényében az első 100 pattanásig (bal oldal), és a mozgás fázistere (csak a függőleges sebességkomponensre), az egyes pontok felett a lepattanás sorszáma (jobb oldal). A mozgás periodikusságára az utal, hogy a 7. ütközéstől kezdve a hely-sebesség számpár állandóan ismétlődik.

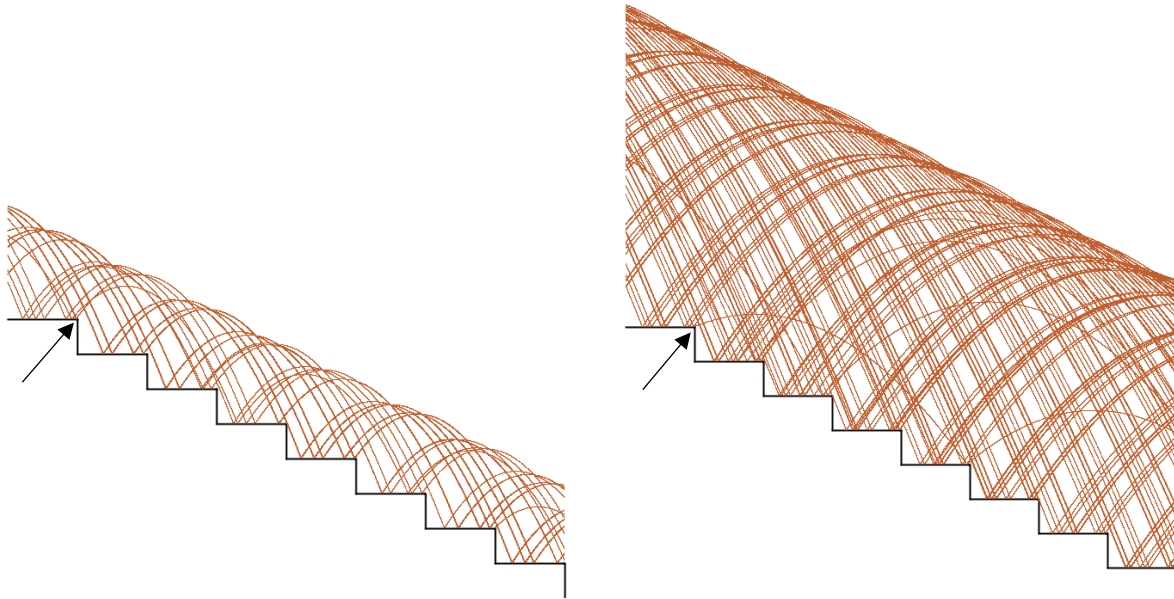
Nézzük meg hogyan változnak a 12. ábrán látható diagrammok, ha a lépcsőfokokat egy kis,  $r = 0.01$  sugarú görbülettel lekerekítjük. Akkor van értelme ezt új esetként vizsgálnunk, ha a labda az első néhány száz ütközés alatt le is pattan a görbületre, ami csak bizonyos kezdőértékekre történik meg. Az általunk vizsgált  $v_0 = 3$  esetben mindössze ötféle ilyen  $x_0$  koordinátát találtunk, vagyis csak öt kis intervallumban lévő  $x_0$  ad számunkra érdekes eredményt. Ha az  $n+1$ . pattanás során először pattan a labda görbületre, akkor az egyes pattanásokhoz tartozó vízszintes sebességkomponensekre:  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1 < u_{n+1}$ , vagyis a vízszintes sebesség megnő, ugyanis a pattanás helyén a görbület egy jobbra lejtő síknak tekinthető, erre pattanva jobbra mutató impulzusvektort szerez. A vízszintes sebesség növekedését a vízszintes ütközési együttható hiányában semmi sem mérsékli, így a görbületre pattanások során egyre nagyobb sebességre tesz szert, és egyre több lépcsőt ugrik át.

Amikor egyetlen pattanás során legalább 100 lépcsőfokot ugrik át a labda, azt mondjuk „elrepült”, hiszen ezután nem valószínű a mozgás, és nincs értelme vizsgálni. Ekkor ugyanis modellünk érvényessége már kétséges, hiszen a sebesség is nagy, s a légellenállás nem hanyagolható el, márpedig mi parabolapályákkal számoltunk. A 13. ábra egy görbülettel rendelkező lépcsőfokok esetében kialakuló diagrammokat mutat. Érdekes hangsúlyozni, hogy



13. ábra: A 12. ábra diagrammjai  $r = 0.01$  esetben,  $x_0 = 0.339$  kezdeti koordinátával. Minden görbületre pattanáskor  $u_n$  értéke növekszik (kék görbe). Látható ennek alapján, hogy az első, a 13. és a 73. ütközéskor is görbületre pattant a labda (ezeket a pillanatokat nyilak jelzik), a növekedést pedig néhány pattanás alatt  $v_n$  is megteszi. A fázistéren az első néhány ütközést beszámoltuk. A labda végül 206 pattanás után elrepül.

a sebességnövekedés nem csak a vízszintes, de a függőleges komponenst is érint. Ez látszik is az ábrán, hogy az  $u_n$  növekedését  $v_n$  mindig követi. Fontos észrevenni, hogy már ilyen kis görbület bevezetés esetén is ennyit változik a mozgás jellege: az  $u_n \equiv 1$  görbétől jelentős az eltérés, és az  $(x, v)$  síkon is sokkal kiterjedtebb az alakzat, mint  $r = 0$  esetén. Érdekes kérdés, hogy mit is jelent ez a pályájának a tekintetében. A labda a görbületre pattanás után néhány pattanással, már nagyobb vízszintes és nagyobb függőleges irányú sebességgel rendelkezik, vagyis valamilyen értelemben egy magasabb energiaszintre lépett. Ezt a pályájának módosulása is kitűnően mutatja: 14. ábrán ábrázoljuk 2. és 3. görbületre pattanás között, illetve a 3. és 4. görbületre pattanás között a mozgásának pályáját (a 4. pattanás a 169. ütközéskor történik meg).

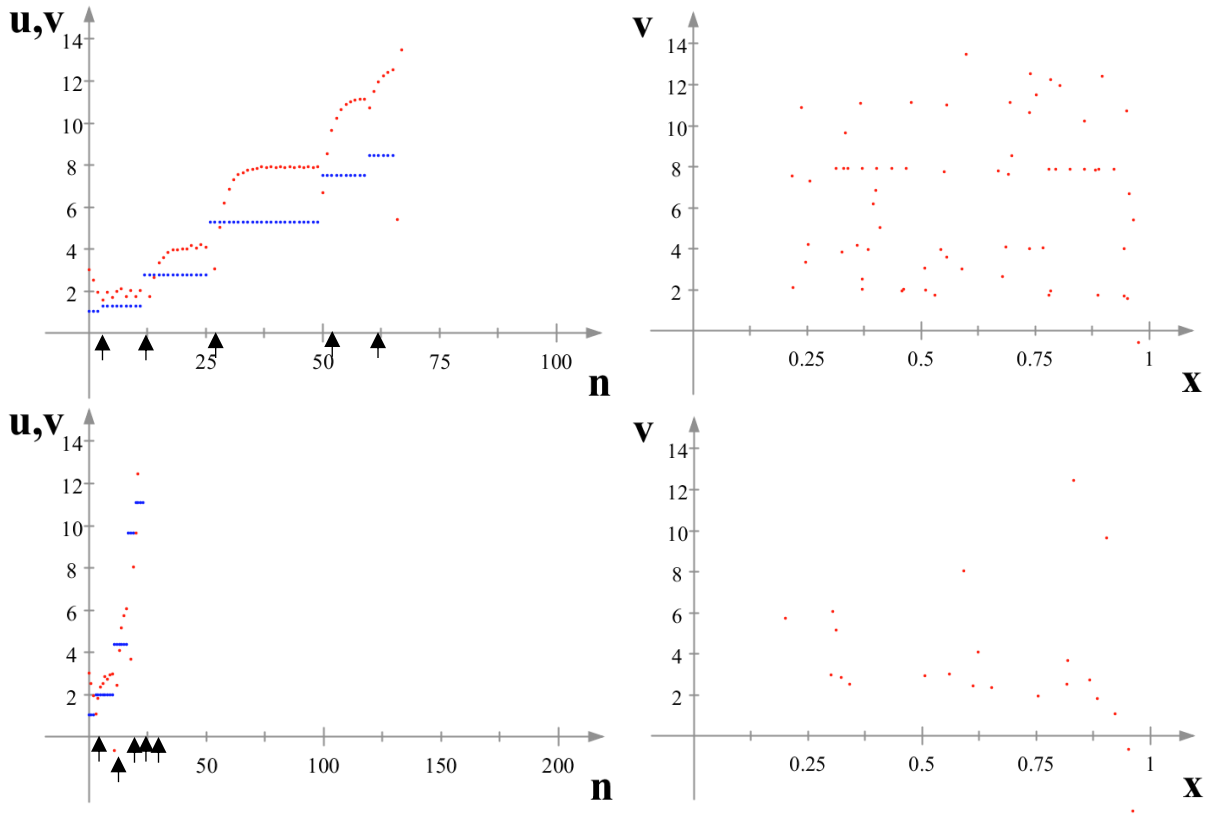


14. ábra: A görbületre pattanások hatása a labda mozgásának alakjára (a labda minden rajzon a 8. lépcsőfokon áthaladva a 0. lépcsőfokhoz kerül). A bal oldalon a 13. ütközéstől a 73. ütközésig, a jobb oldalon a 73. ütközéstől a 168. ütközésig látható a labda pályája (a 73. ütközés helyét mindkét ábrán egy nyíl jelzi).

Azért esett a választásunk erre a 3. görbületre pattanásra, mert itt drasztikusan nő sebesség, és jól látszik a különbség, emellett a kritikus pattanás előtt, és után is sokáig pattogott a labda görbület beavatkozása nélkül. Az ábrán az látszik, hogy a nagyobb mozgási energiája miatt a ferde hajításnak megfelelően megnövekedik a legnagyobb magassága is. Az is észrevehető, hogy ez nem azonnal történik, csak néhány pattanás után áll be a magasabb energiaszintre, ezzel egybevágnak a 13. és 14. ábrákkal kapcsolatos megfigyeléseink.

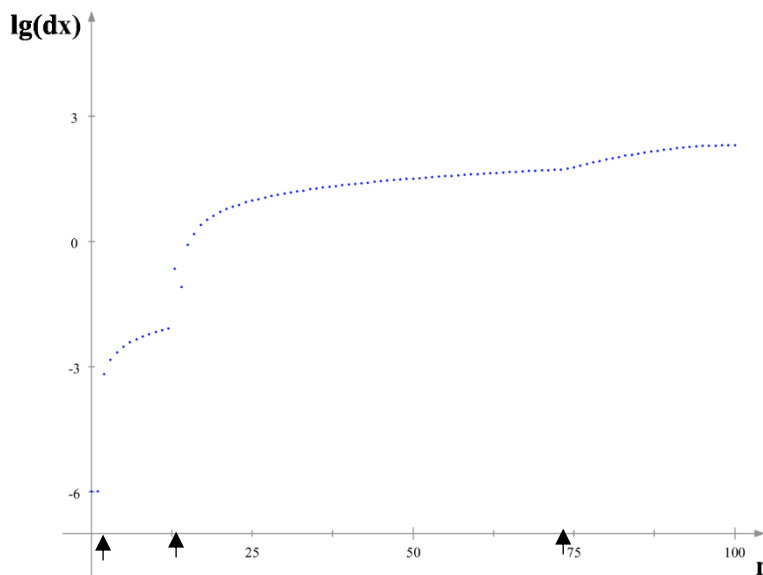
Minél gyakrabban pattan sarokra a labda, annál gyakrabban növekszik a sebessége. Ennél fogva nagyobb  $r$  értékekre gyorsabb növekedés várható és hamarabb elrepül a labda.  $r = 0.05$  és  $r = 0.1$  esetekben kialakuló mozgás adatait mutatják a 15. ábra diagramjai. Látható, hogy a sugár növekedésével az elrepülésig tartó idő lecsökkent.

Nézzük meg hogy találunk-e káoszra utaló jeleket már az  $r = 0.01$  sugarú görbület hozzáadásával. Ehhez indítsunk el két labdát azonos sebességgel, egymástól  $10^{-6}$  távolságra, és figyeljük, hogyan változik a két labda  $dx(n)$  távolsága a pattanások során. Kaotikus folyamatoknál a  $dx(n)$  függvény exponenciálisan nő [3,4], vagyis  $lg(dx(n))$  lineárisan nő (lg



15. ábra: A 13. ábra diagrammjai az  $r = 0.05$  és  $r = 0.1$  esetekben,  $x_0 = 0.59$  és  $x_0 = 0.56$  kezdeti koordinátával. Látható, hogy ahogy a görbület sugara nő, egyre gyakrabban pattan rá a labda, és ezzel együtt egyre gyorsabban nő a sebessége. A labda előbbi esetben 67, míg utóbbi esetben 23 pattanás után repül el.

a tízes alapú logaritmust jelöli). A 13. ábrának megfelelő pattogás mentén érvényes  $\lg(dx(n))$  függvényt mutatja a 16. ábra.

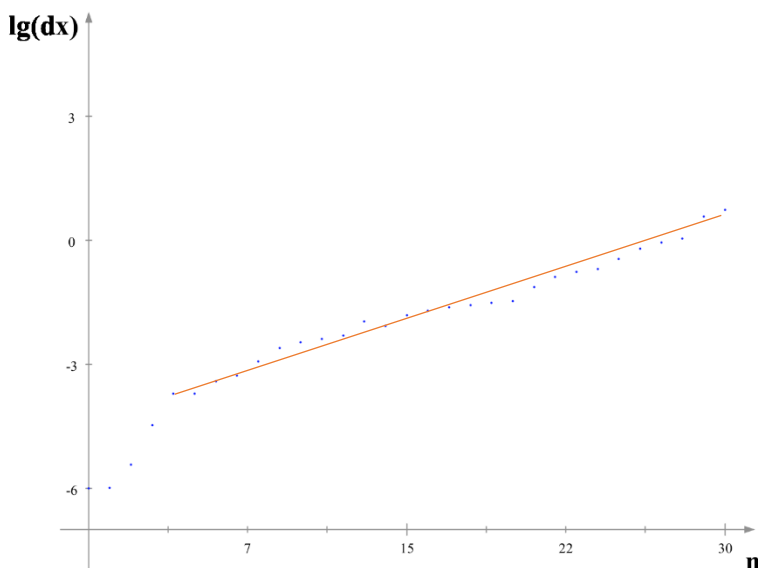


16. ábra: A távolság növekedése az  $r = 0.01$  esetben: az  $x_0 = 0.339$  kezdeti koordinátáról, és a tőle  $10^{-6}$  távolságra elindított labdák  $\lg(dx)$  távolsága az ütközések függvényében. Görbületre pattanások után hirtelen növekedés látható a függvényben, amely aztán egyre lassul. Összehasonlításként megjegyezzük, hogy a szögletes lépcső esetén ez a mennyiség nem változik, végig a  $-6$  értéket veszi fel.

A grafikonon az látszik, hogy amint görbületre pattannak, a következő ütközésre a labdák sokat távolodnak egymástól. Ez a görbület szóró tulajdonságát mutatja, ami kis szórófelületként erősen szór. A görbület miatti hirtelen növekedés után általában egy egyre lassuló növekedés veszi kezdetét. Néha, ahogy ez látszik a második görbületre pattanás után, a 15. ütközésnél, előfordul, hogy véletlenül lecsökken a távolság, de ez mindig csak egyszeri esemény, a következő pattanásnál újra folytatja a növekedését.

A 73. ütközéskor történő, 3. görbületre pattanás látszólag alig van hatással a labdák távolságára, így arra következtethetnénk, hogy ott éppen csak rápattant a sarokra, de sok sebességet nem nyert vele. Visszapillantva a 13. ábrára azonban látjuk, hogy nem ez a helyzet, az a görbületre pattanás nyerte a legtöbb sebességet a három közül, úgyhogy valami más oka kell legyen a túl kicsi módosulásnak. Kicsit jobban megvizsgálva a számokat látjuk, hogy ez a növekedés olyankor történik, amikor a labdák távolsága már több mint 100 lépcsőfok, így igazából semmi közük egymáshoz. Csak addig van értelme a grafikont vizsgálni, amíg még összetartoznak a labdák, éppen ezért ezentúl az ilyen grafikonokat csak a 0 értékig mutatjuk, tehát, amíg egy lépcsőfoknál kisebb a két labda távolsága.

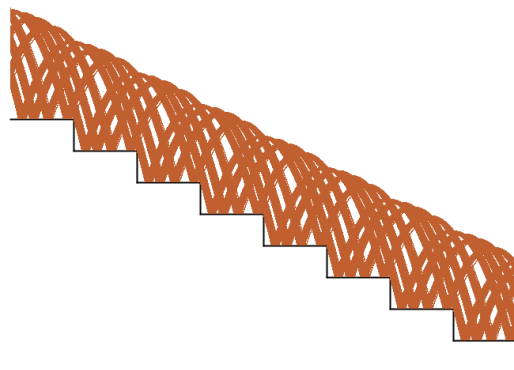
Az ábrán látható hirtelen kiugrások miatt nehezen mondható lineárisnak a függvény, ezért megnéztük az 5 szignifikánsan különböző kezdőértékre, és az egyes pattanásokra kapott  $lg(dx)$  értékeket átlagoltuk, és ábrázoltuk a 17. ábrán. Itt már tagadhatatlan a linearitás, az illeszkedő egyenes meredeksége  $\lambda = 0.22/\text{ütközés}$ . Kaotikus mozgásra, hogy az ún. Ljapunov exponensük [3,4] pozitív. A Ljapunov exponens az  $lg(dx(n))$  mennyiségek átlaga nagy számú kezdőfeltételt vizsgálva. Ha ez a feltétel nálunk még nem is teljesül, a vizsgált néhány kezdőfeltételre átlagolt Ljapunov exponens szerű mennyiség pozitív, azaz a káoszra utaló tulajdonságok már  $r = 0.01$  esetén is megjelennek, éles ellentétben a szögletes lépcső esetével, ahol  $\lambda = 0$ . Mindez összhangban van azzal, hogy a fázistéren szétszórt ponthalmaz jelenik meg a 13. ábra jobb oldali képén, ami a kaotikus mozgások egy másik jellemzője.



17. ábra:  $r = 0.01$  esetben,  $x_0 = 0.068, 0.339, 0.53, 0.631, 0.798$  kezdeti koordinátákról, és a tőlük  $10^{-6}$  távolságra elindított labdák távolságának az átlaga az idő függvényében. A függvény az elején nagyon meredek, hiszen az összes vizsgált labda ilyenkor szinte egyszerre pattan görbületre. Ennek lecsengése után a függvényre  $0.22$  meredekségű egyenes illeszthető.

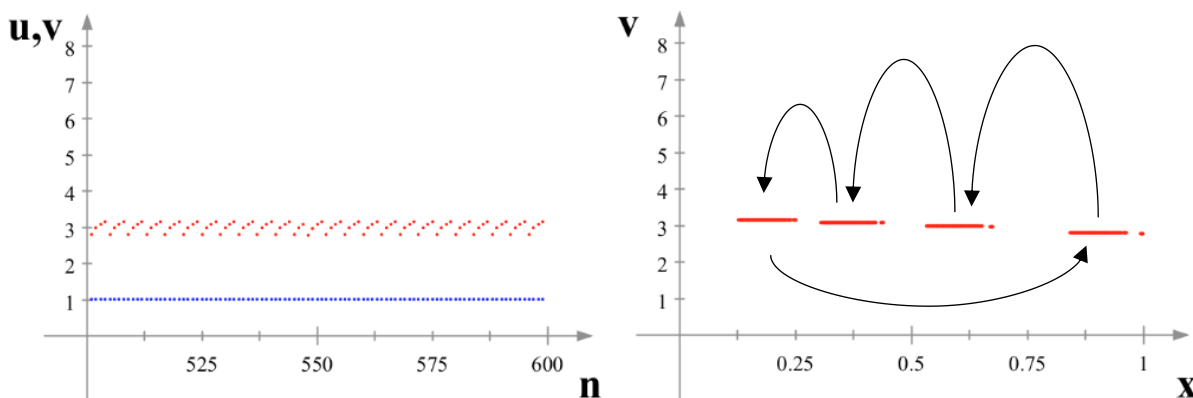
## II) Kváziperiodikus pattogás

A kváziperiodikus mozgás olyan mozgás, mely nagyon hasonlít egy periodikus mozgásra, de a sebesség és a helykoordináták egy kicsit változnak, „nem sikerül” mindig ugyanúgy visszatérni a pattogásnak. Éppen ezért a 11. ábrán látható pirossal jelölt periodikus mozgás nem jön létre, az állandósult mozgás ehelyett bizonyos sávokban mozog. Ez látható a 18. ábrán.



18. ábra: A kváziperiodikus mozgás pályájának képe  $k = 0.75$ -re a szögletes lépcsőn  $x_0 = 0.7$  koordinátáról indulva (a labda a 8. lépcsőt elhagyva itt is a nulladik fölé kerül). Az első néhány, még nem állandósult ütközés kiiktatása céljából az első 500 pattanás után következő 1000 pattanást ábrázoltuk.

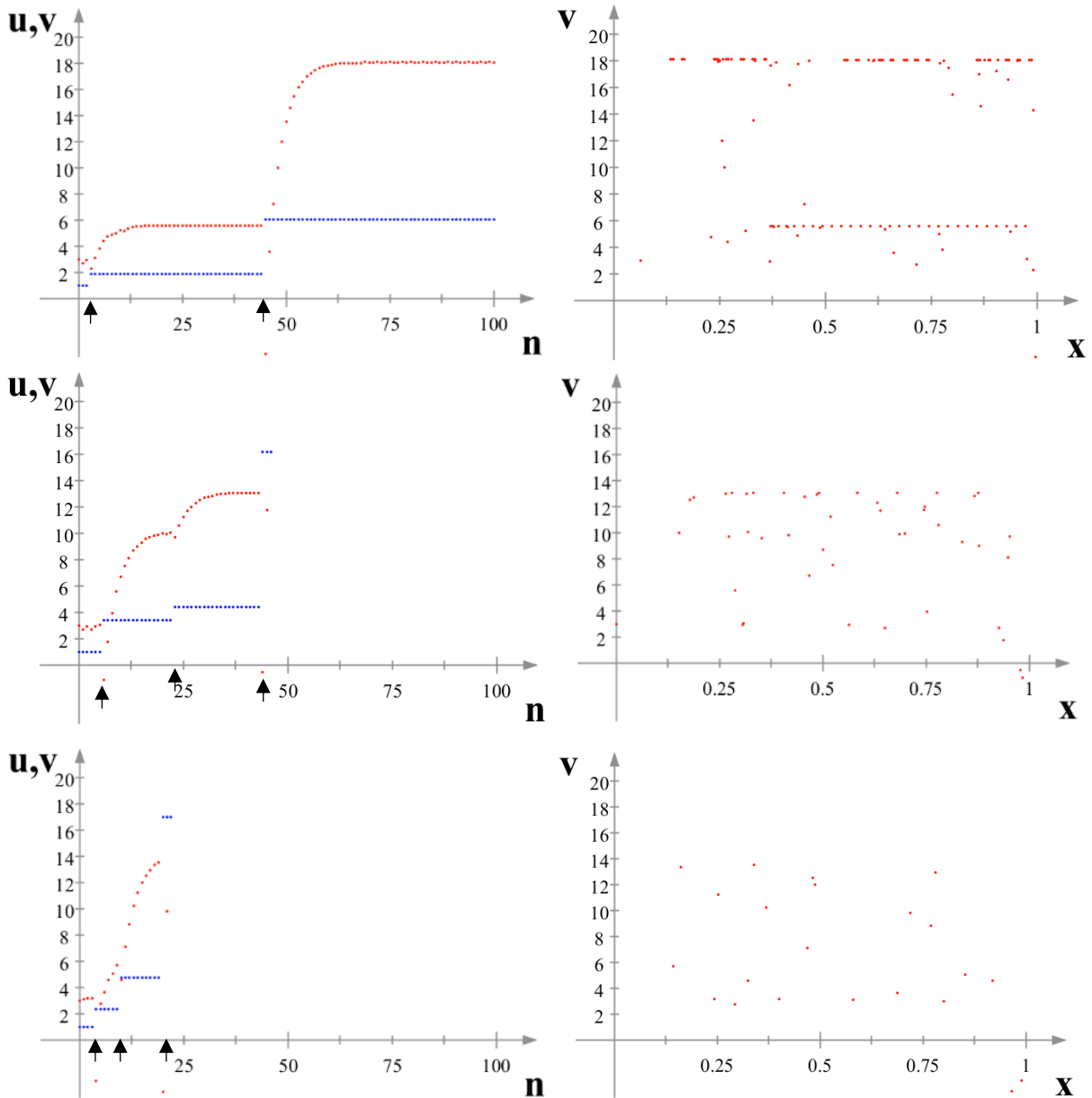
Szögletes lépcsőn a periodikusságot jelentő kivételes, diszkrét  $k$  értékeket kivéve mindig kváziperiodikus pattogás jön létre. Mi a [2]-ben is tanulmányozott  $k = 0.75$  esetet vizsgáljuk. Amint látható, egymáshoz hasonló pattanások történnek, de nem mindig ugyanott, illetve nem mindig ugyanakkora sebességgel. Ennek megfelelően egyszerű szabályszerűség figyelhető meg a mozgás diagrammjain (19. ábra).



19. ábra: Az előző ábra kváziperiodikus mozgásának sebesség-idő diagrammja és fázistera. Egyforma ismétlődő pattanást jellemző értékek helyett hasonló, de kicsit eltérő értékeket vesz fel, így a fázissterén szakaszok láthatók. A labda a szakaszokhoz a nyilakkal megadott sorrendben ad hozzá új pontokat.

Ahogy hozzáadjuk a görbületet, a periodikus esethez hasonlóan a labda egyre nagyobb vízszintes sebességre tesz szert, ha görbületre pattan, és ugyanúgy hamar elrepülhet. Az az egyetlen különbség, hogy a periodikus esetben esetleges a görbületre pattanás, és csak bizonyos kezdőértékre történik meg véges időn belül, itt a pattogás során a tapasztalat szerint mindig felvesz 1-hez közeli  $x_n$  értéket, így kezdőértéktől függetlenül érvényesül a görbület hatása. Ennek ellenére itt is különböző  $x_0$  értékeket vizsgálunk, mert szeretnénk, ha viszonylag hamar

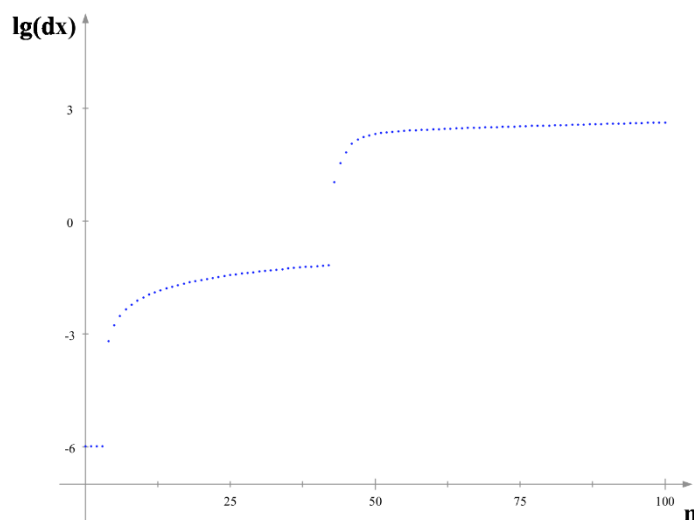
láthatnánk az első görbületre pattanást, ne kelljen 100 ütközést várni. A periodikussággal való hasonlóság miatt egy ábrán ábrázoltuk az  $r = 0.01$ ,  $r = 0.05$  és az  $r = 0.1$  eseteket (20. ábra).



20. ábra: Sebesség-idő diagrammok és fázisterek az  $r = 0.01$ ,  $r = 0.05$ , és  $r = 0.1$  esetekben,  $x_0 = 0.064$ ,  $x_0 = 0.0$  illetve  $x_0 = 0.8$  kezdő koordinátákra. Olyan kezdeti értékeket választottunk, amikre viszonylag hamar pattan görbületre a labda (első esetben 3., második esetben 6., harmadik esetben 4. ütközés során, a görbületre pattanásokat nyilak jelölik). Az első esetben a labda 146, a másodikban 46, a harmadikban 22 ütközés után repül el.

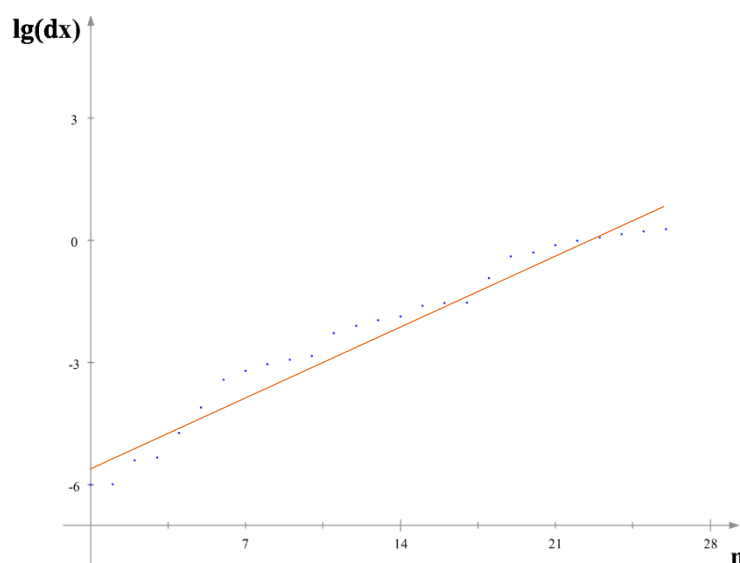
Megfigyelhető, hogy a kváziperiodikus esetben a labda gyakran hamarabb elrepül (az első görbületre pattanástól számítva), aminek az az oka, hogy a kváziperiodikus pattogás során változóbb a labda  $x_n$  koordinátája a pattogások során, így gyakrabban pattan görbületre, és gyakrabban pattan úgy görbületre, hogy sok sebességet nyer vele. Éppen ezért a 20. ábra sebesség-idő diagrammjain sűrűbben látunk nagy ugrásokat a kézzel jelölt  $u$  vízszintes sebességben.

A 21. ábrán ábrázoltuk a két közel indított labda távolságának logaritmusát a pattanás számának függvényében. A 16. ábrához nagyon hasonló ábrákat kapunk, ami arra utal, hogy a görbületre pattanás a gyors távolodás eredete.



21. ábra:  $r = 0.01$  esetben,  $x_0 = 0.064$  kezdeti koordinátáról induló mozgás (20. ábra első sor), és a tőle  $10^{-6}$  távolságra elindított másik labda távolsága az ütközések száma függvényében. A 16. ábrával nagy hasonlóság látható.

Még jobban látszik a hasonlóság, ha a periodikus esetnek megfelelően itt is vizsgálunk 5 szignifikánsan különböző esetet is, melyek az első néhány ütközés egyikében görbületre



22. ábra:  $r = 0.01$  esetben,  $x_0 = 0.064, 0.339, 0.53, 0.818, 0.96$  kezdeti koordinátákról, és a tőlük  $10^{-6}$  távolságra elindított labdák távolságának az átlaga az idő függvényében. A függvény elején nem figyelhető meg a hirtelen nagy meredekség, mint a periodikusnál, hiszen ott kivétel nélkül minden labda az első három pattanás során görbületre pattant, míg itt mindenhol különböző az első görbületre pattanás sorszáma. A függvényre  $0.22$  meredekségű egyenes illeszthető.

pattannak, s ezeket kiátlagolva kapjuk a 22. ábrát. Az erre a függvényre illesztett egyenes meredeksége szintén  $\lambda = 0.22$ .

Azt látjuk tehát, hogy már a legkisebb görbület bevezetése is káosz-szerű tulajdonságok megjelenésére vezet, melyeket a pozitív Ljapunov-exponens és a fázistérbeli pontok szétszórt elhelyezkedése mutat, még ha egyelőre csak gyorsan elrepülő eseteket találunk is csak.

### B) Érintőirányú ütközési együttható hatása

A görbület hozzáadásával azt láttuk, hogy mikor a labda görbületre pattan, nagyobb sebességre tesz szert, és, mivel ezt semmi sem mérsékli, egy idő után elrepül, ami nem valószerű. Ennek elkerülése végett bevezetjük az érintőirányú ütközési együtthatót. A célunk az, hogy minél több ideig mozogjon a labda valószerű sebességgel, és így minél több ideig megfigyelhessük. Ahhoz, hogy minél jobban, és gyakrabban látható legyen a görbület hatása, általában az  $r = 0.1$  sugarú görbülettel foglalkozunk.

#### D) Érintőirányú ütközési együttható csak a görbületen

Ahogy bevezettük a görbületet, logikus, hogy először csak a görbülethez adunk érintőirányú ütközési tényezőt, ezáltal valamilyen módon képet kapunk arról, hogy mennyi energiát kell elvonnunk a labdától, hogy kiegyensúlyozzuk a görbület gyorsító hatását. A csak a görbületen jelenlévő ütközési együttható azt a hatást írja le pontszerű modellünkben, hogy a valódi labda odapattanva jobban megpördül, és így több haladó mozgási energiát veszít.

Azáltal, hogy beleépítünk még egy energiaveszteségi lehetőséget, megtörténhet, hogy a labda olyan mértékben lelassul, hogy már nincs értelme a mozgását vizsgálni. Először arra gondoltunk, hogy hagyjuk abba a labda vizsgálatát, ha a vízszintes és függőleges irányú sebességek négyzetösszege kicsi, de végül úgy döntöttünk, hogy külön bármelyik sebességkomponens kis abszolút értéke esetén leállítjuk a szimulációt. Ennek oka, hogy sem a csupán vízszintes irányú csúszással, sem a csupán függőleges irányú fel-le pattogással nem kívánunk foglalkozni. Természetesen, ha a labda görbületre pattan, akkor a pattanást követően lehet kis abszolút értékű függőleges sebessége, ami a következő pattanásnál megnő, így ilyenkor tovább vizsgáljuk a labdát. Tehát akkor mondjuk egy labdára, hogy az  $n$ . pattanáskor megállt, amikor:

- a)  $|v_n| < 0.01$  és  $x_n < 1 - r$ , vagy
- b)  $|u_n| < 0.01$ .

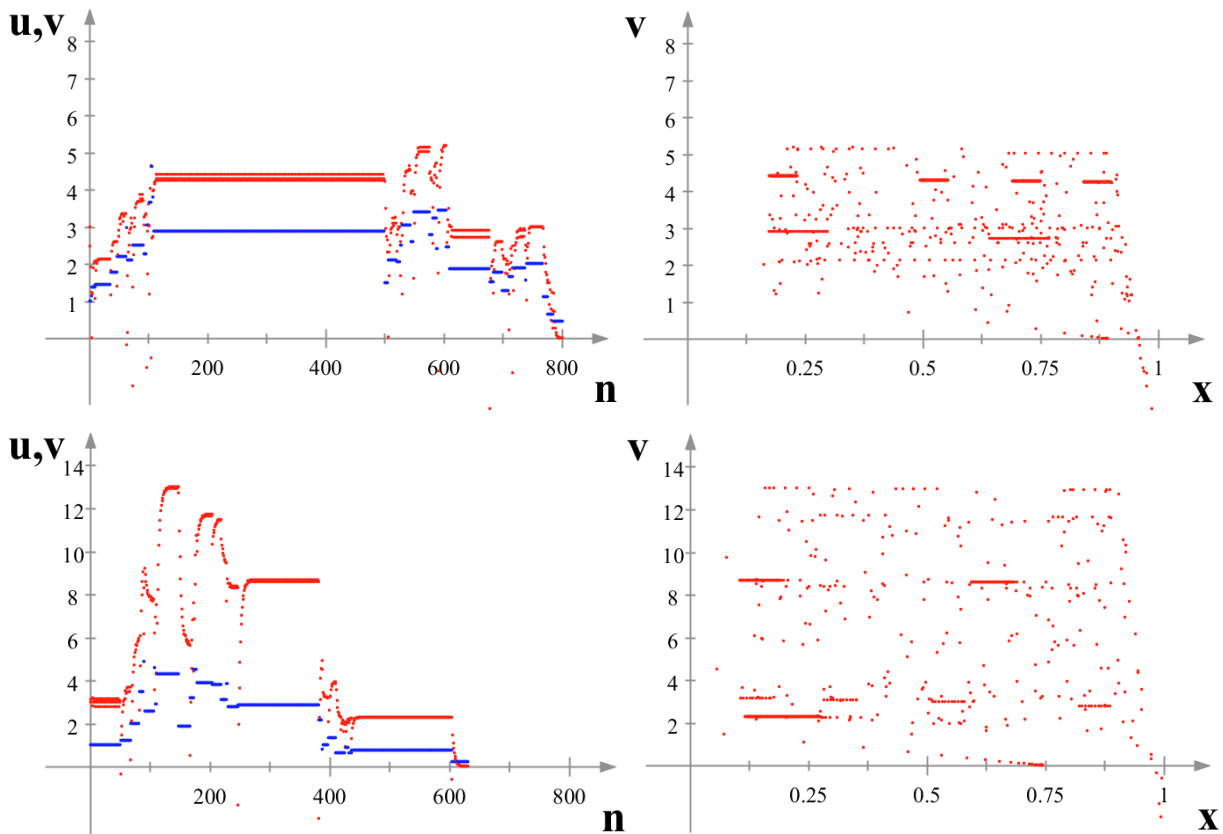
Érdemes definiálnunk egy új változót, ez pedig a mozgás  $\tau$  élettartama. Ez az ütközések száma a labda indulástól addig, amíg vizsgáljuk, vagyis a megállásáig vagy elrepüléséig. Minél tovább tudunk vizsgálni egy rendszert, annál jobb, így tehát nagyobb élettartamú mozgásokat keresünk.

A hosszú élettartam eléréséhez a  $j$ -nek nevezett görbületi érintőirányú ütközési együttható értékét tehát óvatosan kell megválasztanunk, hiszen, ha túl kicsi, és így túl sok energiát von el, akkor a labda megáll, míg ha túl nagy, akkor nem vonunk el elég energiát ahhoz, hogy megállítsuk a repülést. Így tehát  $j$  értékét finomhangolni kell, ha a labda megáll, akkor növelve, ha elrepül akkor csökkentve. Mivel a határ általában nem éles, és előfordulhat, hogy kisebb értékeknél is elrepül, illetve nagyobb értékeknél is megáll, ezért nehéz olyan  $j$  értéket találni ami tényleges határt képez. Mindemellett a görbület hozzáadásával a rendszer nagyon érzékeny lett a kezdőfeltételre amit a két esetben a 18. illetve a 23. ábra mutat. Ezek miatt nehéz olyan értéket is találni, amire a labda több mint ötszázat pattog, de a finomhangolással elérhető egy magas (sok kezdőértékre vett) átlagos élettartam. Ennek elérésén kívül az is fontos, hogy sok



kezdőértékre megnézve az elrepülő, és megálló labdák száma közelítőleg megegyezzen. E két szempont alapján három jegy pontosságig a  $k = 0.75$ -re a legjobb érték  $j = 0.262$ . Itt az átlagos élettartam 172 pattanás, és az elrepülő és megálló labdák aránya a vizsgált 100 kezdőértékre 54:46. A legnagyobb élettartamú mozgást mégsem az ekkora ütközési tényezőnél találtuk.

A legnagyobb élettartamú mozgások, a  $k = 0.6$  és  $k = 0.75$  esetben  $r = 0.1$  sugarú görbületre 800 és 630 pattanásig jutottak el. Ezeknek a sebesség-idő diagrammjaikat és a fázisterüket a 23. ábrán mutatjuk. A kétféle  $k$  értékre újfent hasonló jellegű diagrammokat kapunk.



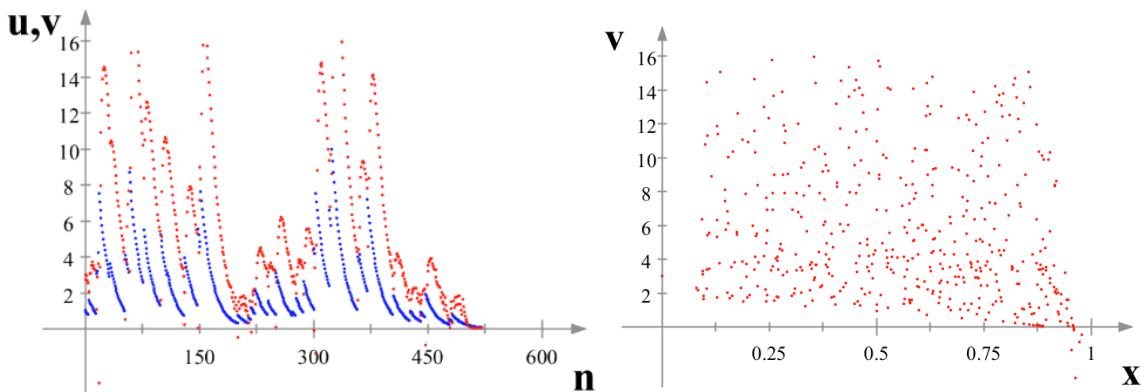
23. ábra: sebesség-idő diagrammok és fázistervek  $k = 0.6$  esetben (felül) és  $k = 0.75$  esetben (alul), előbbinél  $x_0 = 0.56$  és  $j = 0.5$ , az élettartama pedig  $\tau = 800$ , utóbbinál  $x_0 = 0.7$  és  $j = 0.26$ , az élettartama  $\tau = 630$ .

## II) Közös érintőirányú együttható

Másképp is tekinthetünk az érintőirányú ütközési együtthatóra; az a labda és a lépcső anyagi minőségétől függ, tehát a lépcsőn mindenhol ugyanannyi. Ez azt jelenti hogy a korábban csak a görbületen vett együttható a lapos részen is érvényessé válik. Mivel ez még nagyobb energiavesztését jelent, ezért  $j$  korábbi értékét drasztikusan növelni kell a hosszú élettartam eléréséhez.

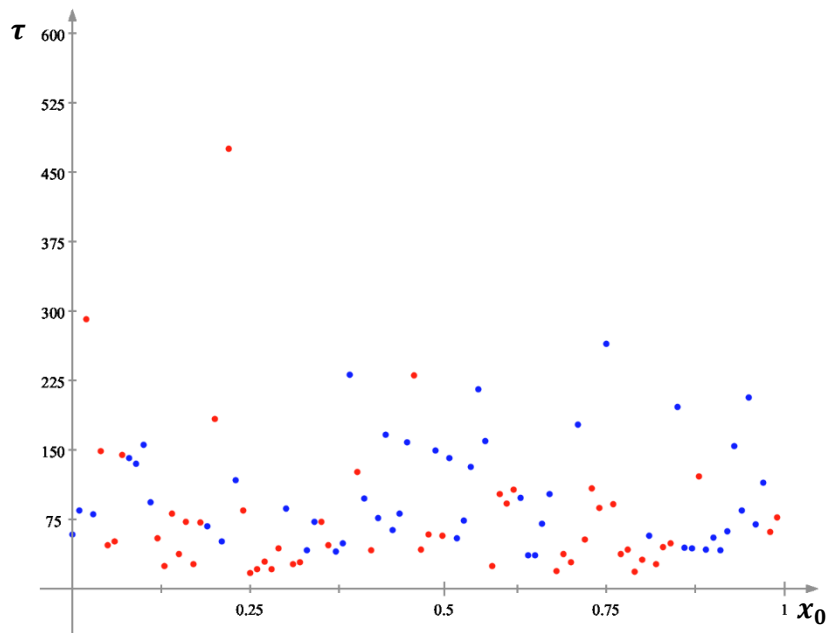
Káosz szempontjából ennek a változatnak az az előnye a korábbihoz képest, hogy azt látjuk, hogy  $u_n$  és  $v_n$  is minden ütközésnél megváltozik, ezért itt periodikus, és kváziperiodikus mozgás rövid ideig sem alakulhat ki. A 24. ábrán bemutatjuk egy ilyen pattogás diagrammjait. A sebesség-idő diagrammon láthatjuk, hogy amikor egy ideig nem pattan görbületre a labda (az  $r = 0$ -ra  $u_n$  esetében konstans,  $v_n$  esetében néhány közeli érték közötti fluktuáló függvényei

helyett, lásd 20. ábra) a sebességek gyors csökkenése látható. Ennek oka, hogy ilyenkor  $u_n$  exponenciálisan csökken (mindig  $j$ -szeresére), és  $v_n$  pedig, mint a korábban is látható volt, követi  $u_n$  változását. Ezzel a fázisdiagrammokon is megszűnnek az egybefüggő vonalak.



24. ábra: Sebesség-idő diagramm és fázistér  $k=0.75$ ,  $j=0.934$  ütközési együtthatókkal,  $x_0=0.0$  kezdőhelyről. A labda 514 pattanás után megáll.

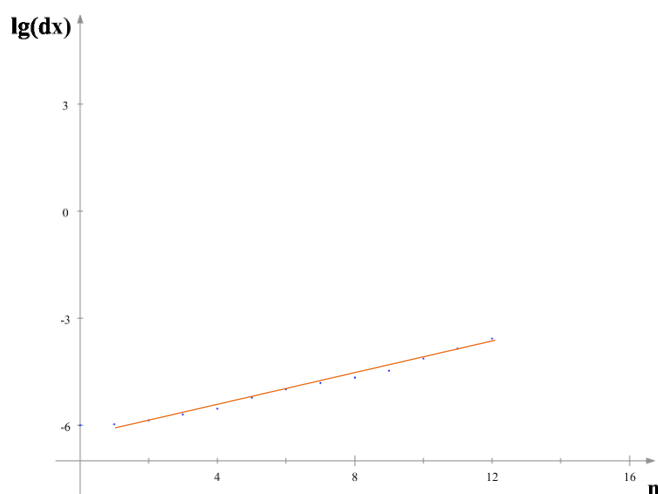
Az egész lépcsőfokon értelmezett  $j$  esetén is nehéz meghatározni az optimális értékét. A görbületi érintőirányú ütközési együtthatóhoz leírt eljárás alapján a három tizedesjegyre kapott legjobb érték  $j = 0.926$ . A 25. ábrán ábrázoltuk a különböző kezdőhelyű labdák élettartamát. Érdeemes megfigyelni, hogy nem fedezhető fel egyszerű szabályszerűség a függvényen, ami újabb jele a káoszra jellemző kezdőértéktől való erős függésnek.



25. ábra: Az élettartam különböző kezdőhelyekre  $k=0.75$  és  $j=0.926$ -ra,  $r=0.1$  ( $v_0=3$ ) esetén. A piros pontok elrepülést, a kék pontok megállást jelentenek, ezek aránya 51:49. Az átlagos élettartam 92 ütközés.

Az átlagos élettartam 92 lett, mely alig több, mint fele a csak görbületen értelmezett érintőirányú ütközési együtthatóval rendelkező esetre kapott átlagértéknek. Tehát, megszabadultunk ugyan a kváziperiodikusságra emlékeztető részekről a sebesség-idő diagrammon és a fázistéren, de nagyban lecsökkent az átlagos élettartam.

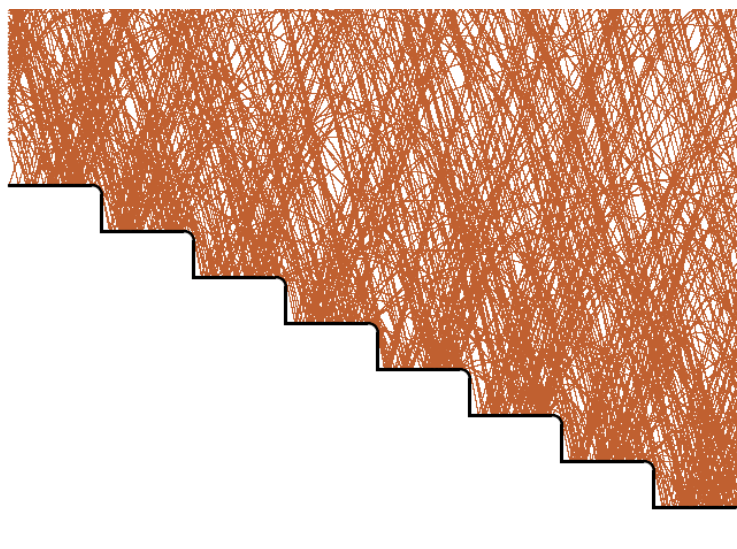
A mozgás kaotikus jellegét láthatjuk két közel indított labda távolsága logaritmusának időfüggéséből. A 26. ábrán bemutatott diagramm 1000 véletlenszerűen kiválasztott  $x_0$  kezdőértékre kapott értékek átlagaként jött létre. A függvény lineáris, az illeszkedő egyenes meredeksége  $\lambda = 0.27$ .



26. ábra:  $j = 0.926$ ,  $k = 0.75$  ütközési együtthatójú lépcsőn 1000 véletlenszerű kezdőhelyű labda, és a tőlük  $10^{-6}$  távolságra lévő labda közötti távolságok logaritmusának átlaga az idő függvényében. A függvényre illeszkedő egyenes meredeksége 0.27.

Érdekes külön figyelmet szentelni a  $j = k$  esetre is, hiszen ekkor csak egyetlen ütközési együttható szükséges. A közös értékre  $k$ -ként hivatkozunk.  $k$  értékét  $j$ -hez hasonlóan finomhangolni kell, ennek eredményeképpen három tizedesjegyre a legjobb érték: 0.842.

A 18. ábrához hasonlóan most is ábrázoljuk a labda pályájának a képét, 24. ábrán tárgyalt esetre. A kapott rajzot a 27. ábra mutatja. Itt már nem láthatóak mindig kihagyott sávok, az 514 pattanás alatt a lépcső közelében a labda pályája szinte teljesen befesti az ábrát, és így sokkal rendezetlenebb, mint a 14. vagy 18. ábrán.



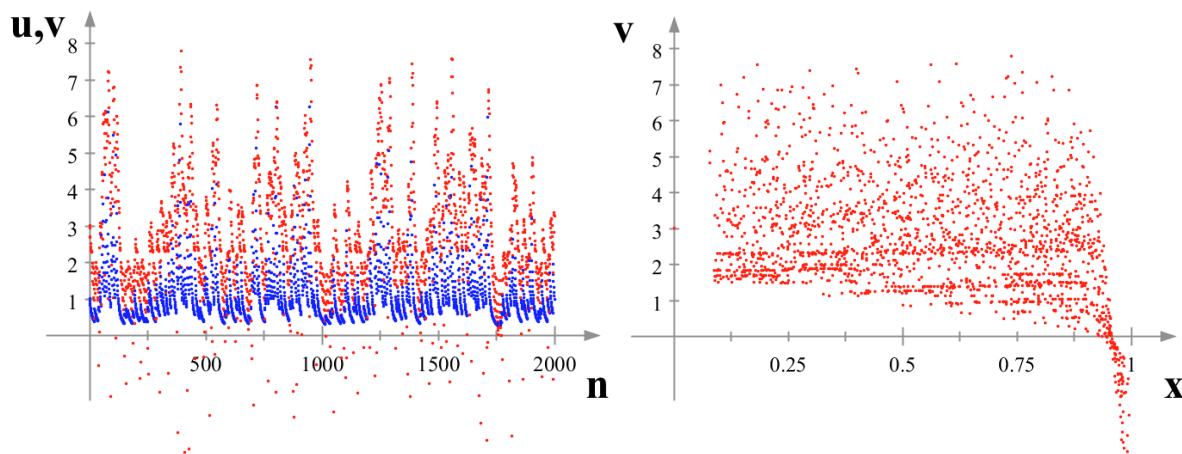
27. ábra: A 24. ábra adataival elindított labda pályájának a képe a teljes élettartama alatt. A labda akár 30-40 lépcsőfokkal a lépcsősor fölé is felpattanhat, s az áttekinthetőség kedvéért csak 3-11 lépcsőfok magasságban mutatjuk a pálya képét.

## III) Sebességfüggő ütközési együtthatók

I) és II) esetekben is azt láttuk, hogy a labda élettartama túl rövid, nem elegendő a kaosz tulajdonságainak pontos tanulmányozásához. Emögött az áll, hogy túl nagy sebességű ugrások jönnek létre. Ezt a problémát orvosolja utolsó vizsgált modell-változatunk, a sebességfüggő ütközési együtthatók modellje. Ez azon alapul, hogy egy apró gumilabda, amikor kicsiket pattog, akkor mozgási energiája nagy részét visszanyeri az ütközések során de, ha nagy sebességgel ütközik, akkor több energia disszipálódik deformáció, és hőképződés miatt. Legyen tehát  $j$  sebességfüggő, amit sokféleképpen elő lehet idézni, de mi az egyszerűség kedvéért olyan úgy, hogy, ha  $u$  érintőirányú sebességgel érkezik le a labda, akkor

$$j = j_0 e^{-\beta u} \quad (30)$$

alakban írható fel, ahol  $j_0$  és  $\beta$  pozitív kezdőparaméterek, amiket úgy szeretnénk megválasztani, hogy a labda semmilyen körülmény között se álljon meg vagy repüljön el. Ezzel a megnövelt disszipációval áttételesen a legellenállás hatását is figyelembe vesszük. Amikor  $u \ll 1$ , akkor  $j \approx j_0$ , tehát visszkapjuk az eddigi eseteket. A  $j_0$  paraméter mellet egy másikat, a  $\beta$ -t is bevezettük. Ennek a paraméternek csak nagy érintőirányú sebesség esetén van hatása, ilyenkor viszont erősen befolyásolja a pattanás utáni sebesség értékét.  $1/\beta$  jelenti azt a sebességet, amelyre az ütközési együttható az  $e$ -ad részére csökken. A szimulációban különböző értékekre nézzük a mozgások diagrammjaikat. Kisebb  $\beta$  nagyobb, nagyobb  $\beta$  kisebb  $j$  értéket eredményez, tehát, ha a labda elrepül, akkor nagyobb  $\beta$  megválasztása szükséges.  $j_0 = 1$  ellenére megtörténhet, hogy a labda megáll, ez a vizsgált,  $k = 0.75$  esetben tapasztalat szerint  $\beta \geq 0.1$ -től kezdve következhet be. A labda elrepülése  $\beta \leq 0.05$ -re szokott megtörténni, így  $0.05 < \beta < 0.1$  tartományt vizsgálunk. Ilyenkor azt látjuk, hogy a labda szinte mindig eljut 10000 pattanásig, és struktúrált fázistérbeli mintázatot kapunk. A 28. ábrán egy  $\beta = 0.08$  esetben előforduló mozgás diagrammjaikat mutatjuk be.

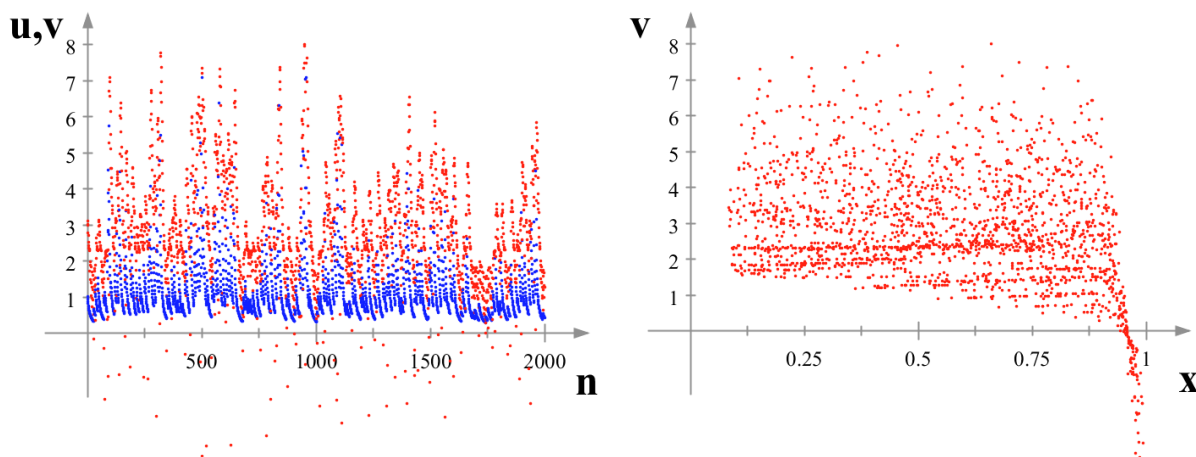


28. ábra:  $k = 0.75$ ,  $j_0 = 1$  és  $\beta = 0.08$  ütközési együtthatójú lépcsőn a  $x_0 = 0$  kezdőhelyről indított labda diagrammjai 2000 pattanásig. A mozgás hosszú élettartamú, mert 100000 pattanásig még követhető volt.

A sebesség-idő diagrammon 25. ábrán lévő diagrammhoz hasonlóan a sebességek folyamatos csökkenése látható hirtelen növekedésekkel megszakítva, de természetesen a csökkenés itt más ütemben (nagy sebességekre mindenképpen gyorsabban) történik. Az is látható, hogy a korábban is tárgyalt módon a  $v$  követi  $u$  csökkenését és növekedését. A fázistér ellenben egy új tulajdonságot mutat. Az eddigi szétszórtság mellett elkezdett vonalakba

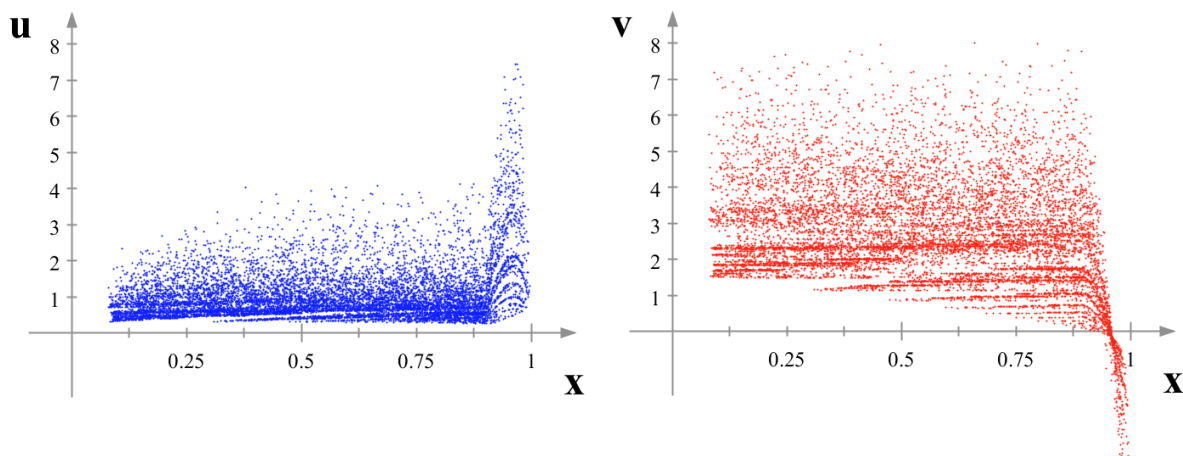
rendeződni, mely a fraktálok jellemzője, a fraktálszerű fázistér pedig a kaotikus mozgások jellemzője [3,4,7].

A 29. ábrán ábrázoltuk egy másik mozgást azonos paraméterekkel, de a labda más kezdőkoordinátájával. A sebesség-idő diagramm jellegében hasonló, és látható hogy a mozgások maguk különböznek. Ennek ellenére a fázistéren ugyanazt az ábrát látjuk, vagyis a különböző kezdeti feltétellel induló mozgások rövid átmeneti viselkedés után ugyanazt az alakzatot járják be. Ez az alakzat ezért attraktornak nevezhető, és mivel a mozgás rajta kaotikus, ezért fázistérbeli mintázatot kaotikus attraktornak nevezzük.



29. ábra:  $k=0.75$ ,  $j_0=1$  és  $\beta=0.08$  ütközési együtthatójú lépcsőn a  $x_0=0.5$  kezdőhelyről indított labda diagrammjai 2000 pattanásig. a 28. ábrával különbözőek a sebesség-idő diagrammok, se a fázisterek megegyeznek.

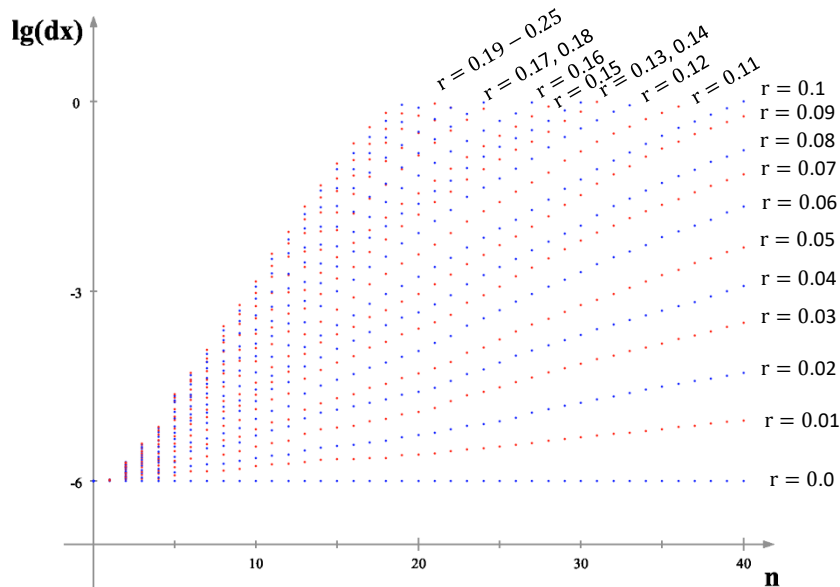
A 30. ábrán a 28-29. ábrán tárgyalt paraméterű mozgás  $u-x$  és  $v-x$  fázistérében megjelenő pontokat mutatjuk 10000 pattanásig, ami a kaotikus attraktor két különböző nézete. Az  $u-x$  fázisterről idáig nem volt szó, de most ezt is ábrázoltuk, hiszen ez is a fázistér egy lehetséges másosulata, és ezen is észrevehető szálasodás. Mindkét nézetben kis sebességekre vízszinteshez közeli szálak láthatóak a lépcső lapos részén, ami a görbületen megtörik ( $x > 0.9$ ), ahol  $u$  esetében szétszóródnak,  $v$  esetében kis helyre koncentrálnak az előforduló



30. ábra:  $k=0.75$ ,  $j_0=1$  és  $\beta=0.08$  ütközési együtthatójú,  $r=0.1$  sugarú görbülettel rendelkező lépcsőn bármilyen kezdőhelyről indított labda kaotikus attraktorát mutatja 10000 pattanásig. Mindkét grafikonon látható az értékek vonalakba rendeződése, mely a fraktálok, és így a kaotikus mozgások egy jellemzője.

sebességértékeket mutató vonalak. Tisztán látszik, hogy a függőleges sebesség negatív értékeket is felvehet, de ez mindig csak a görbületen történhet meg.

Az érintőirányú ütközési együttható bevezetése után a mozgásokat mind az  $r = 0.1$  esetben vizsgáltuk, de az a) fejezetben azt láttuk, hogy már a legkisebb sugár esetében megjelenik a Ljapunov-exponenshez hasonló mennyiség, mely két egymáshoz közel indított mozgás  $\lg(dx) - n$  grafikonjára illeszthető egyenes meredeksége. Minél nagyobb a meredekség, annál gyorsabban távolodik két közel indított labda, így a mozgás annál nehezebben jelezhető előre.



31. ábra:  $k = 0.75$ ,  $j_0 = 1$  és  $\beta = 0.08$  ütközési együtthatójú lépcsőn 1000 véletlenszerű helyről, ettől kis távolságra indított labdák átlagos távolsága az idő függvényében,  $r = 0.0$ ,  $r = 0.01$ ,  $r = 0.02 \dots r = 0.25$  esetekben (szomszédos értékek különböző színnel jelölve). A grafikon minden egyes esetben egy egyenes alakját veszi fel, még hozzá nagyobb  $r$  esetén mindig nagyobb meredekségűt.

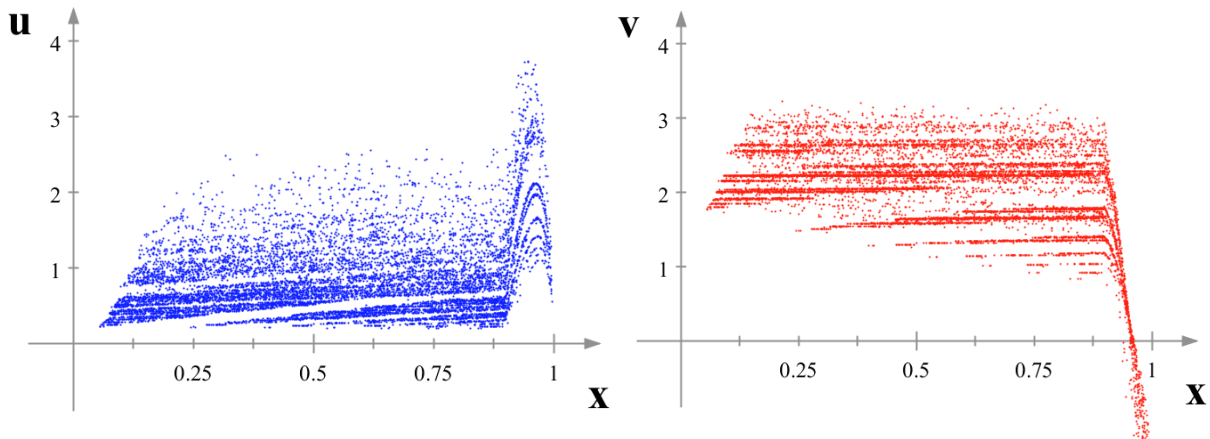
Kisebb sugarú görbület jobban szór, de arra ritkábban pattan a labda, tehát felmerül a kérdés, hogy melyik hatás dominál, vagyis hogyan függ  $r$ -től a meredekség. A 31. ábrán ábrázoltuk különböző görbületi sugárra ugyanannak az 1000 véletlenszerű helyről induló labdához tartozó  $\lg(dx) - n$  grafikon átlagát. Az ábráról látható, hogy a Ljapunov-exponens monoton nő a görbületi sugár növekedésével, a  $0.025-0.5$ /ütközés tartományban

Megjegyezzük, hogy bevezethető a normálirányú ütközési együttható sebességfüggését is, pl. a (30)-hoz hasonló

$$k = k_0 e^{-\gamma|v|} \quad (31)$$

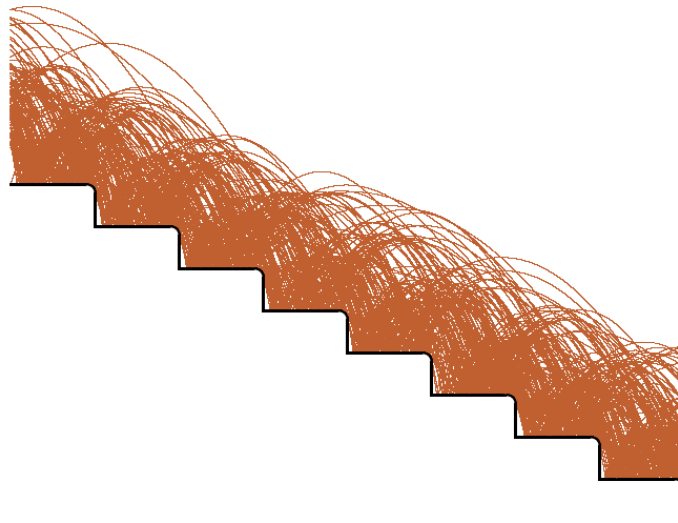
alakban, ahol  $k_0$  és  $\gamma$  pozitív paraméterek,  $v$  pedig a labda ütközés előtti normálirányú sebessége. A (30)-tól eltérően most megjelenik egy abszolútérték jel a sebesség körül, hiszen  $u$ -val ellentétben  $v$  mindig negatív érték (hiszen a labda az ütközés előtti pillanatban lefelé halad).  $j_0$ ,  $k_0$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  mind külön megválasztható paraméterek, de az egyszerűség kedvéért a  $j_0 = k_0 = 1$  és a  $\beta = \gamma$  feltételeknél maradunk. Ez azért előnyös, mert így egyetlen paraméterrel ( $\beta$ ) megadható mindkét sebességfüggő ütközési együttható. A tesztelés során azt láttuk, hogy  $\beta$  a korábinál kóval nagyobb,  $0.03 < \beta < 0.15$  tartományban mindig hosszú

élettartamú mozgást ad. A  $\beta = 0.1$  esetben fellépő mozgás kaotikus attraktora a 32. ábrán látható. A grafikon szálasodása minden eddigénél tisztábban látható.



32. ábra:  $k_0 = j_0 = 1$  és  $\beta = 0.1$  esetben a kaotikus attraktor az első 10000 pattanásra.

Ennek az ábrának az adataival újfent ábráztuk a pálya képét az első 4000 pattanásra, ez a 33. ábrán látható. Itt nem volt szükség az ábra tetejének levágására, mint a 27. ábrán, mert sosem pattanta a labda négy lépcsőfoknál magasabbra. A mozgás során a labda a lépcső közelében teljesen befesti a képet.



33. ábra: A 32. ábra adataival elindított labda pályájának a képe az első 1000 pattanás során.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (30) és (31)-ben mutatott sebességfüggésen kívül sok más függés is lehetséges, pl. a sebesség abszolútértékétől való függés, s más függvényalak, pl. szigmoid is, de ezek vizsgálata már meghaladja a dolgozat kereteit.

## 9. Összefoglalás

A dolgozatban arra a kérdésre kerestük a választ, hogy kaotikus-e egy kisméretű (pontoszerű) labda mozgása lekerékített sarkú fokokból álló lépcsőn. A káosz egyik elfogadott definíciója szerint olyan hosszantartó mozgás, mely az alábbi egyszerre jelenlevő tulajdonságokkal rendelkezik [4]:

(i) nem ismétli magat (közelítőleg sem),

(ii) nem jelezhető előre, vagyis közeli pontok átlagosan exponenciális tempóban távolodnak egymástól, s

(iii) a fázistérbeli ábrázolásban kiterjedt, de mégis strukturált, fraktál szerkezetű ponthalmaz jellemzi a mozgás mögött meghúzódó kaotikus attraktort.

A modell feltételezése szerint az ütközések között a mozgás ferde hajítás, a lényeges esemény - az irányváltás és a disszipáció - az ütközésekkor történik. Ezért célszerűnek bizonyult az ütközések sorozatát követni (a visszapattanás utáni sebességekkel), diszkért (n) idejű eseménysorozatként.

Már a legkisebb lekerekítés is lényegi változásra vezet a szögletes lépcsőn történő mozgáshoz [2] képest. A görbületen szert tett vízszintes irányú sebességnövekedés miatt egyre nagyobb ugrások történhetnek, egyre nagyobb sebességekkel, s így a mozgás kivezethet a modell értelmezési tartományából, a légellenállást ugyanis végig elhanyagolhatónak tételeztük fel. Ezért egy bizonyos kritikus ugrási nagyság (100 lépcsőfok) meghaladása esetén értelmetlennek tekintettük a szimulálást, s leállítottuk. Így viszont erős időbeli megszorítást kaptunk, ami megnehezíti a mozgás kaotikusságának ellenőrzését (hiszen csak hosszú ideig tartó mozgás lehet szigorú értelemben kaotikus).

A hagyományos, mérőleges sebességekre vonatkozó ütközési együttható mellett az idősor jelentősen eltér a szögletes lépcsőhöz tartozótól, de még sok szabályos vonást is mutat, a fázistérbeli pontok szétszóródnak, de még kevesen vannak. A legmeglepőbb változás a közeli pontok távolodási ütemében látszik, s rögtön közelítőleg exponenciálisnak bizonyul, szemben a szögletes lépcső semmi távolodást nem mutató esetével. Lényegi átlagképzésre azonban a kevés esetszám miatt nincs mód.

A modell módosításai az érintőleges sebességekre vonatkozó ütközési együttható (j) bevezetésével arra világítanak rá, hogy a görbületen történő pattanások rugalmas tulajdonságai eltérőek lehetnek a síklapon történőektől. A görbületen, majd a teljes lépcsőfokon is érvényes nagyobb energiavesztés figyelembevételével az ugrások valamelyest kisebbé váltak, de nem maradtak hosszán a kritikus ugrási nagyság alatt. Az érvényes mozgások hosszabbak lettek, s mindhárom vizsgált tulajdonság egyre jobban érvényesülőnek bizonyult. Igazán hosszú mozgásokhoz csak akkor jutottunk, amikor figyelembe vettük az ütközési együtthatók sebességkomponensektől való függését. Ekkor már a fázistérbeli fraktálszerkezet is tisztán megmutatkozott, s az exponenciális távolodás ütemének, a Ljapunov-exponensnek a görbületi sugártól való függését is meg tudtuk határozni.

Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a lekerekített szélű lépcsőkön pattogó labda mozgása modellünkben kaotikusnak bizonyult, s mivel a valóság ennél bonyolultabb (pörgés, rugalmas rezgés, légellenállás) s egy összetettebb rendszer általában még kaotikusabb, elfogadhatjuk, hogy a valódi labdák lépcsőn lefelé pattogása is kaotikus vonásokat mutató folyamat (persze azokat is véges ideig figyelhetjük csak).

### **Irodalomjegyzék:**

[1] A. Jaros, A. Nussbaumer, H. Kunze; Basiswissen Physik-compact. Öbvhpt, Wien, 1999



[2] Gruiz Márton, Meszéna Tamás, Tél Tamás; Kaotikus, vagy csak összetett? – Labdák pattogása lépcsőn. Fizikai Szemle, Budapest, 2016

[3] Edward Ott; Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1993

[4] Tél Tamás, Gruiz Márton; Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.

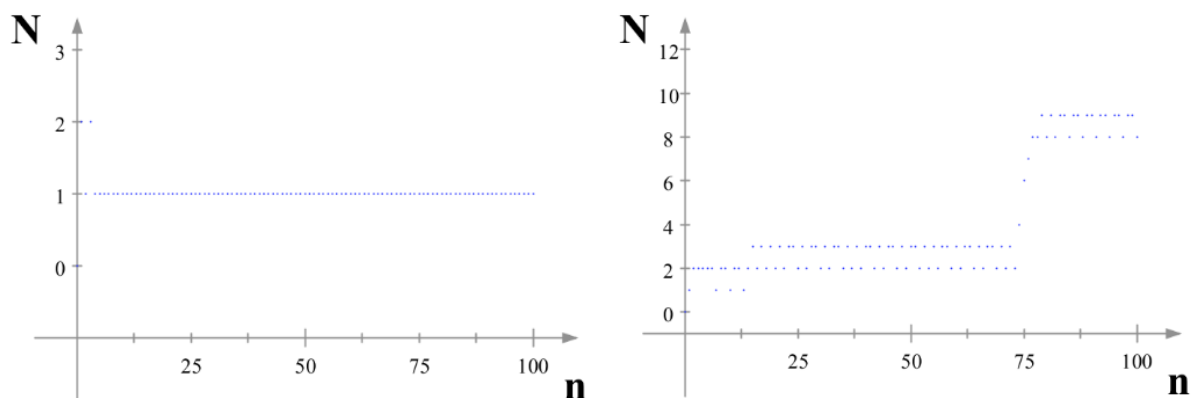
[5] Ben Fry, Casey Reas; Processing, Weblap: <https://processing.org/>

[6] Peter Lager; Jasmine, Weblap: <http://www.lagers.org.uk/jasmine/>

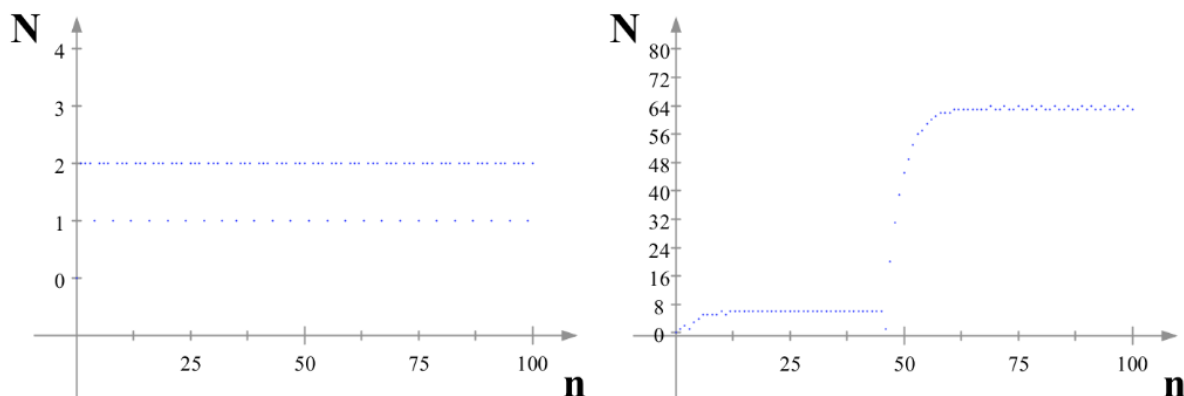
[7] Edyta Patrzalek; Fractals: Useful Beauty (General Introduction to Fractal Geometry, Elérés: <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm>

### Függelék

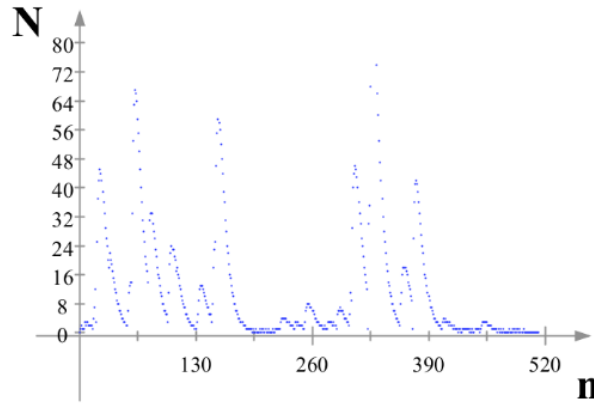
#### A) $N - n$ függés



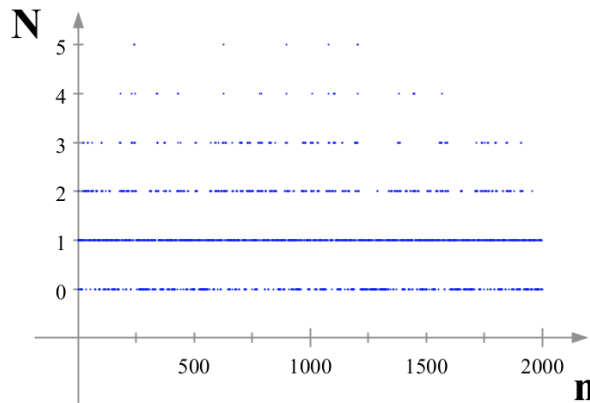
34. ábra: A  $k=0.6$ -ra fellépő mozgás  $N - n$  függvénye  $r=0$  (bal oldal) és  $r=0.01$  (jobb oldal) esetben, a 12., illetve a 13. ábra adataival.



35. ábra: A  $k=0.75$ -re fellépő mozgás  $N - n$  függvénye  $r=0$  (bal oldal) és  $r=0.01$  (jobb oldal) esetben, a 19., illetve a 20. ábra felső sorának adataival.



36. ábra: A  $k = 0.75$ -re fellépő mozgás  $N - n$  függvénye a  $j$  érintőirányú ütközési együttható hozzáadásával, az  $r = 0.1$  esetben, a 24. ábra adataival.



37. ábra: Sebességfüggő ütközési együtthatók esetén fellépő mozgás  $N - n$  függvénye az  $r = 0.1$ -ra, a 12., illetve a 32. ábra adataival.

## B) Energiaveszteség

Definiáljuk a  $h_n$  mélység nevű változót, mely az  $n$ . lépcsőfok magassága a 0.-hoz képest. Ennek  $m$ -ed része megmondja, hogy a 0. pattanás és az  $n$ . pattanás között összesen hány lépcsőfokot ugrott át. A korábbi változókból  $h_n$  számolható:

$$h_n = m \sum_{i=0}^{n-1} N_i. \quad (30)$$

Ebből az  $n$ . ütközés után a dimenziótlan energiája (tömeget egységnyinek tekintve, és a helyzeti energia nullszintjét a 0. lépcsőfok lapjának egyenesén megválasztva):

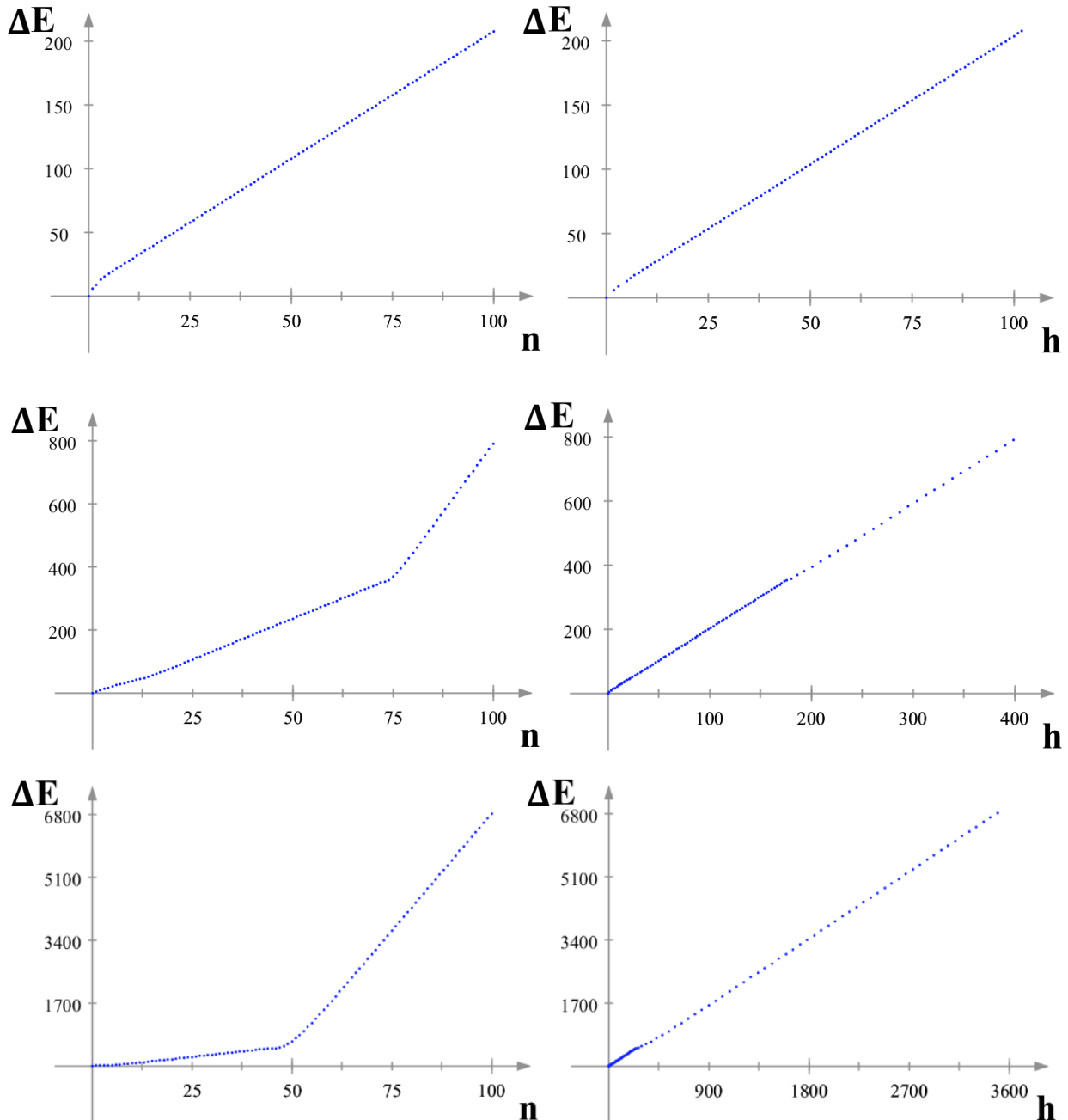
$$E_n = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - H(h_n - y_n), \quad y_n \leq 0$$

Érdeemes az energiagrafikokat úgy ábrázolni, hogy a kezdőértéktől függetlenül áthaladjon az origón, így szembetűnővé téve a különböző kezdőértékekkel felrajzolt grafikonok hasonlóságát, úgyhogy ehelyett az energiát a 0. pattanás energiájához viszonyítjuk. A negatív értéket felvevő összenergia helyett inkább a kezdeti állapot óta történő pozitív előjelű energiaveszteséget nézzük. Tehát az energiaveszteség  $\Delta E_n$  értéke (definíció szerint  $u_0 = 1$  és  $h_0 = 0$ ):

$$(31)$$

$$\Delta E_n = \frac{1 + v_0^2}{2} + Hy_0 - \left( \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - H(h_n - y_n) \right).$$

Az energia változásának bemutatására megrajzoltuk a  $r = 0$  és  $r = 0.01$  esetben vizsgált pattogások energia-idő és energia-mélység diagrammját a 38. ábrán. Első ránézésre az látszik, hogy  $r = 0$ -ra, az első néhány értéket leszámítva mindkét grafikon lineáris növekedést mutat.



38. ábra: Az energia idő és mélység függése  $k = 0.6$ -ra az  $r = 0$  esetben (felül) és az  $r = 0.01$  esetben (középen), illetve  $k = 0.75$ -re  $r = 0.01$  esetben (alul). Előbbi esetben néhány pattanást követően mindkét függvény egy egyenes alakját veszi fel, melyen egyenletes sűrűségben vannak pontok. Utóbbi két esetben (melyek lényegesen csak a meredekségükben különböznek) a görbületre pattanások után az  $\Delta E - n$  függvényen az egyenes megtörik, és a meredekség nő, míg az  $\Delta E - h$  függvény az egyenes alak, és a meredekség is megmarad, de az egyenesen kijelölt pontok sűrűsége csökken.

$r = 0.01$ -re viszont az energia- idő diagrammon nagy változást látunk. A görbületre pattanások után nő a meredeksége. Ennek oka az, hogy ugyan nagyobb sebessége lesz, de ennél sokkal nagyobb hatása van annak, hogy emiatt több lépcsőfokot ugrik át egyszerre, így nő az egy ütközésre jutó energiaveszteség. Ennek ellenére az energia-mélység függvény megtartotta lineáris alakját, és a meredekségét is. Annyi változott, hogy mivel egyszerre több lépcsőfokot ugrik át a labda, ezért kevesebb lépcsőre pattan le, így ritkábban rajzolhatunk fel pontokat. Az, hogy a sebességnövekedés ellenére a függvény linearitása és meredeksége nem változik, bizonyítja, hogy (30)-ban  $h_n$  dominál, leginkább ez határozza meg a függvény alakulását.

Ha jobban megvizsgáljuk a diagrammokat, láthatjuk, hogy közvetlenül a görbületre pattanások után mind az  $\Delta E - n$ , mind az  $\Delta E - h$  diagrammon megtörik egy kicsit a linearitás, és csak néhány pattanás után, amikor a 13. ábrán  $v_n$  értéke is megnövekedett, és a labda elérte az új standard mozgási energiáját áll be  $\Delta E - n$  diagramm esetében az új meredekségű, illetve  $\Delta E - h$  diagramm esetében a régi meredekségű, de más pontsűrűségű egyenes.