
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar



KVANTUMMECHANIKA

KÖZÉPISKOLÁBAN

Készítette:

Tóth Kristóf

Fizika-matematika osztatlan tanárszak

VI. évfolyam

Témavezető:

Tél Tamás

Egyetemi tanár

Elméleti Fizikai Tanszék

KIVONAT

A tudományos ismeretek bővülésének nem csak a technológia fejlődésében, de a fizikaoktatás súlypontjainak áthelyezésében is szerepe van. Kutatásom során az Udinei Egyetem elmúlt tíz évben megszerzett tapasztalatait és anyagait felhasználva kezdtem el a kvantummechanika újszerű, középiskolás tanításának magyarországi kipróbálását.

A feldolgozott anyag alapján a természeti jelenségek sajátos valószínűségi jellege, a kvantumállapot vagy a szuperpozíció elve is megérthető, azonban a kvantummechanika-tanulás talán legfontosabb pedagógiai hatása, hogy egyedülálló módon demonstrálja a természettudományos megközelítés erejét, hiszen olyan jelenségekre ad helyes magyarázatot, melyek megértése a hétköznapi „józan ész” számára teljességgel lehetetlen volna.

A fény foton természetét feltételezve, polarizátorlemezekkel és kalcitkristállyal személyesen végzett kísérletek révén jutnak el a diákok arra, hogy egy adott polarizációjú fotonnyaláb nem tekinthető két másik polarizációjú nyaláb statisztikus keverékének. A kevert állapotok tulajdonságának ilyen formában való megértésén kívül képet kapnak többek között a kvantumbizonytalanságról, a műveletek fel nem cserélhetőségéről és a mérés szerepéről a kvantummechanikában.

A dolgozat azonfelül, hogy egy részletes beszámolót ad a tanítási folyamatról, olyan oktatási anyagokat is tartalmaz, melyek eddig nem voltak elérhetőek magyar nyelven. Ezek az olasz és angol nyelvű források nem csak lefordításra, de azok újabb átgondolásra is kerültek.

Mivel a kurzuson részt vett hallgatók a fénypolarizációval és a modern fizikával kapcsolatos tanulmányaikat már befejezték, lehetőség volt egy előzetes és utólagos felméréssel a közoktatás jelenleg is érvényben lévő változatának összehasonlításával.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	4.
2. A VÁLASZTOTT ÚT	5.
3. A TANANYAG.....	6.
3.1 A FÉNYPOLARIZÁCIÓ JELENSÉGE	6.
3.2 A FOTONKÉP	10.
3.3 AZ EGYMÁST KIZÁRÓ ÉS NEM-KIZÁRÓ TULAJDONSÁGOK.....	12.
3.4 AZ A. HIPOTÉZIS, AZAZ TEKINTHETŐ-E A FOTONNYALÁB KÜLÖNBÖZŐ TULAJDONSÁGÚ FOTONOK KEVERÉKÉNEK?	12.
3.5 A KVANTUMBIZONYTALANSÁG ÉS A FOTONOK MEGKÜLÖNBÖZTETHETETLENSÉGE.....	13.
3.6 A PÁLYA FOGALMÁNAK HIÁNYA	13.
3.7 A VALÓSZÍNŰSÉGI ÉRTELMEZÉS ÉS A JQM SZIMULÁCIÓ.....	15.
3.8 MATEMATIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK A KVANTUMMECHANIKÁBAN, A SZUPERPOZÍCIÓ-ELVE	18.
4. MIT TANÍT MEG AZ ANYAG?	20.
5. TANÍTÁSI TAPASZTALATOK, EREDMÉNYEK.....	23.
6. SZEMÉLYES ÉSZREVÉTELEK.....	32.
7. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	36.
8. IRODALOMJEGYZÉK	37.
9. A. FÜGGELÉK. AZ OKTATÁSI ANYAG FELADATLAPJAI	39.
9. B. FÜGGELÉK. A PRE/POST TESZT	72.

1. BEVEZETÉS

A XX. század tudományos eredményei a technológiai fejlődés mellett paradigmafejlődéssel is járt. Természetessé válik a mai ember számára, hogy ezek a természeti csodák [1] a gimnáziumi tananyag részét képezik. Azonban arról már szakmódszertani viták folynak, hogy milyen mélységig történjen ezen területek tanítása. Mivel a dolgozat témája a kvantummechanika tanítása, ezért tárgyalásom erre a területre szűkítem le.

Magyarországon a 80-as években már történt kísérlet a kvantummechanika részletesebb tanítására, azonban ez kudarccal zárult: az egész közoktatást célozta, miközben a diákok absztrakciós szintjét meghaladta, továbbá a tanárok sem rendelkeztek elegendő háttérismerettel a téma magabiztos tanításához. Talán ez okozta azt, hogy Magyarországon további komolyabb próbálkozások nem születtek. Így a közoktatás a Bohr-modellen túl jelenleg leszűkül a Heisenberg-féle határozatlansági relációra ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$), az atomok kvalitatív képére, illetve a hullám-részecske kettőségre, melyeket tudománytörténeti keretrendszerbe foglalunk [2].

Szerencsére külföldi társaink az utóbbi évtizedben intenzív kutatást végeztek ezen kérdéskörben. Ezekből is talán a *Marisa Micheline* által vezetett kutatócsoport vívta ki legjobban a nemzetközi megbecsülést, mely az Udinei Egyetemen szerveződött. Idén szeptember elején lehetőségem nyílt arra, hogy kutatási eredményeikbe betekintést nyerjek, majd ezt a magyar közoktatásban is megkíséreljem megvalósítani.

A dolgozat felépítése követi az Olaszországban kidolgozott módszertant, így nyújtva részletes betekintést ebbe, az eddig magyar nyelven nem ismertetett tananyagba, melyet saját kiegészítéseimmel színesítek. A dolgozatban a tananyagot az egyetemi oktatás nyelvén is megfogalmazom. 2019 őszén kísérletet tettem a Czuczor Gergely Bencés Gimnázium és Kollégiumban e témakör megtanítására, melyen 5 db önkéntes, végzős diák vett részt, így a leírtakat személyes, tanítási tapasztalatokkal bővítem, mindemellett eredményeimről is beszámolok.

A 2. *fejezetben* a kvantummechanika tárgyalásának lehetséges útvonalai olvashatóak. Ezt követi a 3. *fejezet*, mely részletesen bemutatja a tananyagot. A 4. *fejezetben* pedig a középiskolai ismereteket egyetemi nyelvezettel is megfogalmaztam. Az 5. *fejezet* a tanítási tapasztalataimat összegzi, melyben a diákok teszten nyújtott eredményét is bemutatom. Az olvasó figyelmébe ajánlom a *Függelék*et is, melyet két részre bontottam, az A. részben a tananyaghoz kapcsolódó feladatsorok találhatók meg, melyek fordítását én végeztem, s ezt követi a B. rész, melyben a pre- és posztteszt feladatsora található meg, mely tesztkérdések egy hányadát én készítettem, bizonyos kérdéseket pedig átvettem.

2. A VÁLASZTOTT ÚT

A kvantummechanikai folyamatok leírására több út is létezik. Használhatjuk a Schrödinger nevéhez köthető hullámmechanikát, illetve a Heisenberg nevéhez köthető mátrixmechanikát. Azonban megtehetjük azt is, hogy egy általánosabb, Dirac által bevezetett, absztrakt jelölést használjunk [3]. Viszont középiskolában csak az alábbi lehetőségekkel élhetünk:

1.) Pusztán kvalitatív tárgyalást alkalmazunk és például fizikatörténeti úton közelítjük meg a kérdéseket, a fő történelmi jelentőségű kísérletekre koncentrálnak. Ebben az esetben a magyarázatok félklasszikusak, sok időt igényelnek, így a lényeges kvantummechanikai fogalmakhoz nem jutunk el. Jelenleg ez jellemzi a magyar közoktatást.

2.) A 80-as évek kísérletének megfelelően választjuk. Mivel célunk a középiskolás tanítás, a tárgyalást le kell szűkíteni a valós függvények halmazára. A 80-as években, nemzetközi szinten elsőként Marx György és Tóth Eszter készítettek tankönyvet [4][5][6] a kvantummechanika témaköréből, melyet középiskolásoknak szántak. Azonban általános, nemzetközi tapasztalat, hogy a hullámfüggvény a diákoknak túl bonyolult, erős kompetenciákat igényel mind matematikában, mind fizikában. Továbbá a legfontosabb törvényekhez nagyon nehezen lehet csak eljutni. Így ennek az útnak a választása nem volna célszerű.

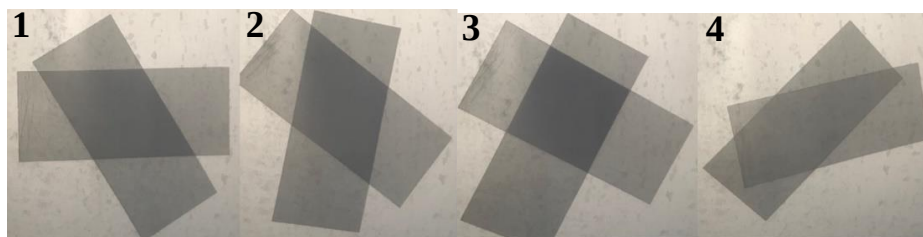
3.) A fizikai állapotot állapotvektorral reprezentáljuk, de kizárólag olyan esetekre szorítkozva, ahol az állapotvektor 2 dimenziós. Lehetőség nyílik azonban arra is, hogy általánosan beszéljünk a fizikai állapotról a Dirac által javasolt módon. A dolgozat során ismertetett tananyag ezt a megközelítést használja, Marisa Michelini és munkatársai módszerét követve [7][8].

3. A TANANYAG

3.1 A fénypolarizáció jelensége

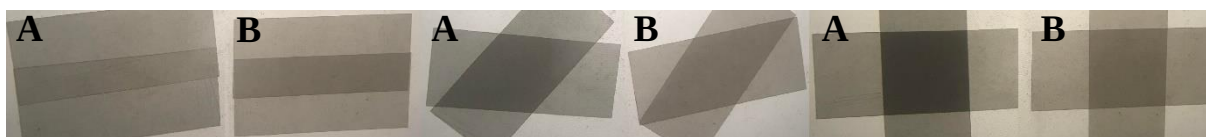
Az anyag a fénypolarizáción keresztül jut el a legfontosabb kvantummechanikai törvényekhez. Ehhez az *A. Függelék 1. feladatsora* tartozik, mely polarizációval kapcsolatos kísérletekkel kezdődik. Az alábbi legfontosabb felismeréseket tehetjük diákjainkkal:

1.) Ha két polarizátorlemez egymásra helyezve teszünk le egy írásvetítőre és a kettőt együttesen forgatjuk, akkor az áthaladó fény intenzitása végig ugyanannyi, ha azonban a két polarizátorlemez egymással bezárt szögét változtatjuk, akkor az áthaladó fénynyaláb intenzitása is más lesz. Vagyis a két polarizátorlemez egymással bezárt szögétől függ a rajtuk áthaladó fény intenzitása (*1. ábra*).



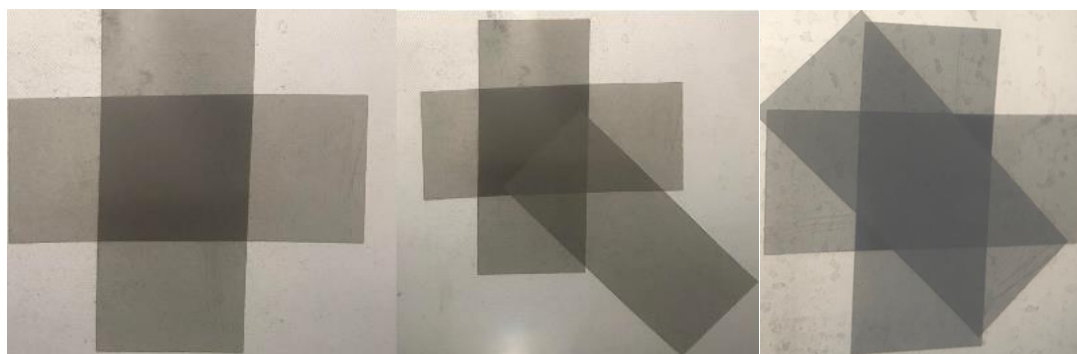
1. ábra: Írásvetítőre helyezett két polarizátorlemez képe (melyek polarizációs iránya a lemezek hosszanti élével párhuzamos). Jól látható, ha a kettőt együtt forgatjuk (1-es és 2-es jelzés), akkor nem változik, ha a két polarizátor egymással bezárt szögét változtatjuk (3-as és 4-es jelzés), akkor változik az áthaladó fény intenzitása. Akkor minimális, ha a lemezek merőlegesek (3-as jelzés).

2.) Ha a polarizátorlemezek csak fényszűrőként működnének, akkor nem kellene függenie az áthaladó fény intenzitásának a polarizátorlemezek egymással bezárt szögétől (*2. ábra*). Ezért a fényintenzitás mellett kell, hogy legyen a fénynek egy másik tulajdonsága, melyet nevezhetünk polarizációs tulajdonságnak. Mindig az utolsó polarizátorlemez hozza létre a kilépő fény polarizációs tulajdonságát. Mivel az emberi szem csak a fényintenzitást képes érzékelni, ezért a polarizáció vizsgálatához polarizátorlemezeket kell használnunk. Ha a vizsgálatához használt polarizátoron maximális a fényáteresztés, akkor megtaláltuk a fény polarizációs irányát.



2. ábra: Az A jelzésű képek minden esetben polarizátorlemez párt, a B jelzésű képek pedig fényszűrőket mutatnak. A kísérlet megmutatja, hogy a polarizátorlemezek nem csupán fényszűrők, s a fénynek az intenzitása mellett van polarizációs tulajdonsága is.

3.) Ha két egymásután elhelyezett polarizátorlemez egymáshoz képest merőleges helyzetű, akkor nem halad át fény. Azonban, ha behelyezünk egy harmadik polarizátorlemez a kettő közé, akkor fog fény áthaladni (3. ábra), mert a második polarizátorlemez megváltoztatja az elsőből kilépő fény polarizációs tulajdonságát. Így amikor a harmadik polarizátorlemezrel találkozik, a fény már olyan polarizációs állapotban van, hogy az képes lesz áthaladni a harmadik lemezen (csökkent intenzitással). Ha azonban az írásvetítőre helyezett két egymásra merőleges polarizátorlemezre tesszük rá a harmadikat, akkor nincs kilépő fény, mert már a második lemezen sem jut át az írásvetítőből kibocsájtott fény. Vagyis csak két egymást követő polarizátorlemez egymáshoz viszonyított helyzete számít. Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy a polarizátorlemezek sorrendje nem felcserélhető.



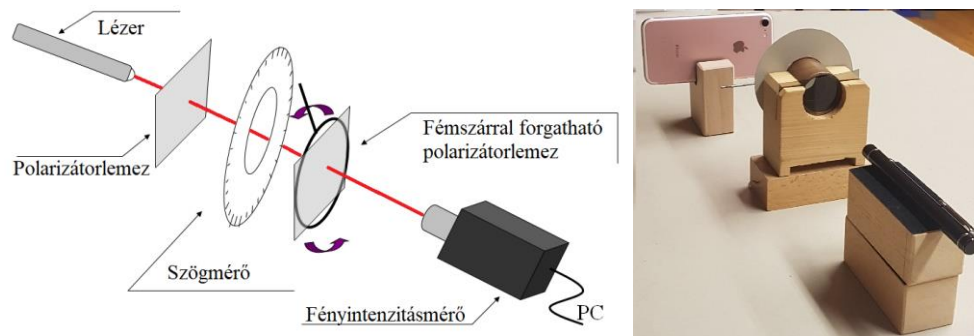
3. ábra: Két merőleges helyzetű polarizátorlemezen nem halad át fény. Azonban diákjainkkal meggyőződhetünk arról, hogy ha két egymásra merőleges helyzetű polarizátorlemez közé betesszünk egy harmadikat (amely nem merőleges egyikre sem), akkor a rendszeren az írásvetítőből kibocsájtott fény át fog haladni.

Akár diákjaink is feltehetik a kérdést, hogy vajon a polarizátorlemezek bezárt szögétől hogyan függ az áthaladó fény intenzitása. Méréssel tapasztalatainkat kvantitatívan is megfogalmazhatjuk. Ehhez a következő eszközökre van szükségünk:

- Egy lézer.
- Egy fényintenzitásmérő műszer. Azonban, ha ez nincs kéznél, használhatjuk okostelefonunkat is, mindössze egy alkalmazást kell letölteni telefonunkra, mely a

telefon kamerájával méri a beeső fény intenzitását. Mi az IOS-ra telepíthető LightMeter nevű programot használtuk.

- Két polarizátorlemez egymással bezárt szögének változtatására alkalmas eszköz, melynek elvi felépítése a 4. ábrán konkrét megvalósítása az 5. ábrában látható.

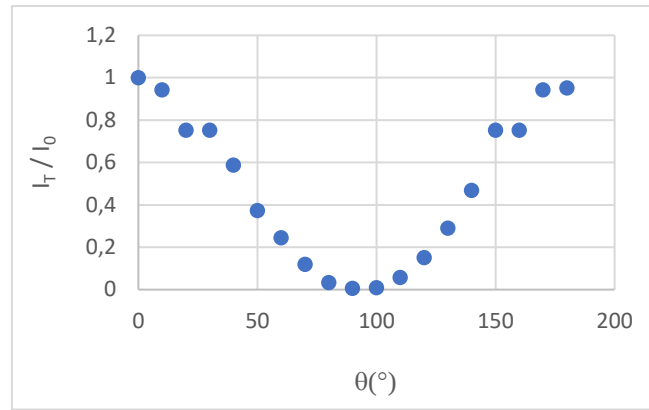


4. ábra: A mérés elvi elrendezése.



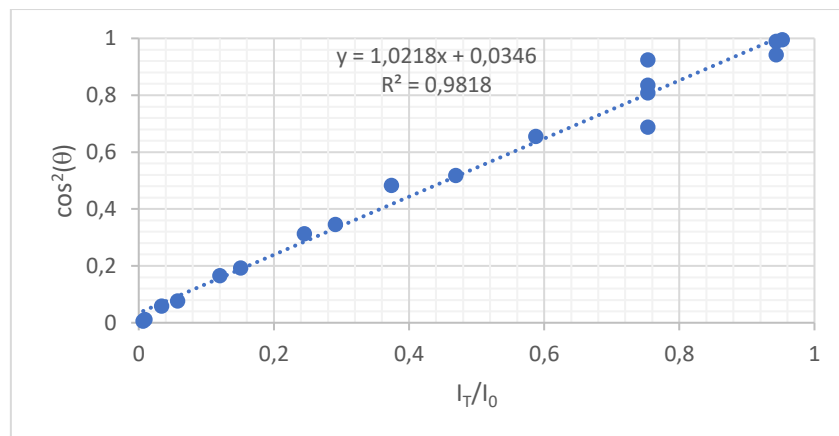
5. ábra: Az általunk használt eszköz (előlnézetből és hátulnézetből). Egy forgatható fémhengerre rögzítünk egy polarizátorlemez, mely a hengeren található fogantyúval forgatható. Az eszköz másik végére egy polarizátorlemez helyezünk, amelynek helyzete rögzített. Ahhoz, hogy a két lemez egymással bezárt szöge mérhető legyen, a forgatható lemez mögé egy szögmérőt helyeztünk. Pont a polarizátorlemez forgatására használt fogantyú mutatja a két lemez egymással bezárt szögét. (Előzetesen a polarizátorlemez olyan helyzetben lett felrakva, hogy maximális fényáteresztésnél a fogantyú éppen a 0° -os helyzetet mutassa.)

A mérési eredmény számszerűsítéséhez a diákok által is ismert *Microsoft Excel* programot használtuk. Jelöljük I_0 -al a két polarizátorlemez egyirányú állásánál kapott intenzitás értéket, azaz azt, amikor maximális a fényáteresztés. Legyen I_T pedig az a fényintenzitásérték, amelyet a forgatható polarizátorlemez különböző szögei esetén mérünk. Ha ábrázoljuk *Excelben* az I_T/I_0 arányszámot a polarizátorlemez fokokban mért θ szögének függvényében, akkor a 6. ábrának megfelelő grafikont kaphatunk.



6. ábra: Az ábrán egy telefonnal végzett mérésünk eredménye látható. Megfigyelhető, hogy 90° -nál az áthaladó fény intenzitása zérus, azaz a fény nem halad át.

A grafikonból megsejthetjük, hogy a két mennyiség közötti kapcsolatot a $\cos^2(\theta)$ függvény adja meg. Ezt úgy ellenőrizhetjük, hogy ábrázoljuk az I_T/I_0 függvényében a $\cos^2(\theta)$ -t, s ha a kapott mérési pontok egyenesre illeszkednek akkor a két mennyiség között egyenes arányosság van.



7. ábra: A mérési pontok közel egyenesre illeszkednek, vagyis a polarizátorlemezek bezárt szögének koszinuszának négyzete adja meg az áthaladó fény intenzitásának arányát.

A 7. ábra grafikonján jól látható az I_T/I_0 és a $\cos^2(\theta)$ mennyiségek lineáris kapcsolata. Így felírhatjuk a keresett összefüggést, amit Malus-törvénynek neveznek [9]:

$$I_T = I_0 \cdot \cos^2(\theta).$$

A diákokkal megbeszéljük, hogy a polarizátorlemeznek van fényszűrő hatása is. Ezt fejezi ki a T átteresztőképesség. Az átteresztőképesség azt adja meg, hogy egy polarizátorlemez a rá eső fényintenzitás mekkora hányadát engedi át, ha a beeső fény polarizációs iránya megegyezik a polarizátorlemezével. Ezt figyelembevéve a Malus-törvény:

$$I_T(\theta) = T \cdot I_0 \cdot \cos^2(\theta).$$

Kísérletünkben T nem jelent meg, mert mérésünkben az I_0 érték a két lemez egyirányú állását jelentette, így akkor az ideális polarizátorlemezek esetét foglaltuk törvénybe. Ennek a törvénynek a tanulmányozásával foglalkozik az *A. Függelék 2. feladatsora*.

3.2 A fotonkép

Az oktatási anyag ezután bevezeti a fotonok fogalmát. A tananyag leszögezi, hogy el kell fogadnunk azt a tényt, hogy a fény fotonokból áll, melyek oszthatatlan, diszkrét egységek, továbbá, hogy a fényintenzitás arányos a fotonok számával. Ekkor a Malus-törvényt felírhatjuk az alábbi alakba is (feltételezve az ideális polarizátorlemezeket, azaz, ha az áteresztőképesség $T = 1$):

$$N_T = N_0 \cdot \cos^2 \theta,$$

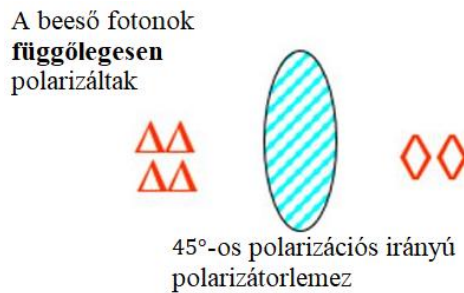
ahol N_0 a beeső fénynyaláb fotonszáma, N_T pedig a polarizátorlemezen áthaladó fotonszám.

Míg elektromágneses hullámok esetén a polarizációnak szemléletes jelentése van, addig a fotonképben nincs egyszerű dolgunk. Annak érdekében, hogy ezeket az információkat rajzainkba meg tudjuk jeleníteni, éljünk a következő jelölésekkel az *A. Függelék 4. feladatsora* szerint:

- *: vízszintesen polarizált foton szimbóluma,
- Δ : függőlegesen polarizált foton szimbóluma,
- $\diamond$: 45° -osan polarizált foton szimbóluma,
- $\heartsuit$: 135° -osan polarizált foton szimbóluma.

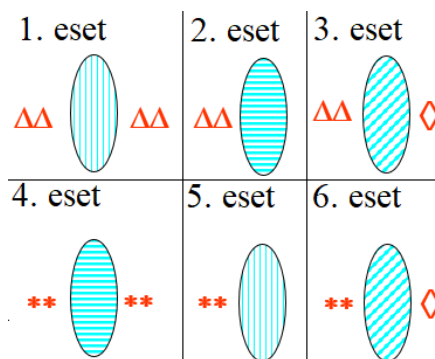
A fotonok számát, azaz a fénynyaláb intenzitását pedig a szimbólumok száma jelenti. A Malus-törvény ebben a képben úgy fogalmazható meg, hogy a kilépő fotonok száma kisebb, mint a beesőké, s természetesen a kilépő fotonok polarizációja is általában más¹. A *sematikus 8. ábra* erre ad példát.

¹ A tananyag itt már megemlíti a valószínűségi értelmezést, miszerint a Malus-törvényben szereplő $\cos^2 \theta$ a fotonok, polarizátorlemezek történő áthaladásának valószínűségét adja meg (lásd *A. Függelék 2. és 3. feladatsora*). Azonban ezt csak egy foton áthaladási valószínűsége kapcsán. A tananyag csak későbbi része foglalkozik pontosabban a valószínűségi értelmezéssel.



8. ábra: 4 db függőlegesen polarizált foton egy 45°-os polarizációs irányú polarizátorlemezre esik. A Malus-törvény jóslata szerint az intenzitás felére csökken ($\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$), tehát két $\diamond$ tulajdonságú foton fog áthaladni.

A 9. ábra bemutat néhány más esetet is.



9. ábra: Néhány további példa a Malus-törvény alkalmazására a fotonképben. A polarizátorlemezek csíkozásai azok polarizációs irányát jelentik. Az 1., 2., 4. és 5. esetekben vagy teljes áteresztés vagy teljes elnyelés történik. A 3. és 6. esetben a fotonok fele halad át a polarizátorlemezen ($\cos^2 45^\circ = 1/\sqrt{2}$), miközben új polarizációs tulajdonságra tesznek szert.

Az ehhez kapcsolódó feladatok megoldása során diákjainkkal tehetünk néhány fontos észrevételt:

- A fotonok mindig olyan polarizációs tulajdonságúak lesznek, amely megfelel az utolsó polarizátorlemez polarizációs irányának.
- A Malus-törvény segítségével megadható a polarizátorlemezekén áthaladó fotonok száma.
- A Malus-törvény azt is megmutatja, hogy egy adott polarizációjú foton biztosan áthalad egy vele megegyező polarizációs irányú polarizátorlemezen.
- A Malus-törvény értelmében a függőlegesen polarizált fotonok sosem fognak áthaladni egy vízszintes irányú polarizátorlemezen, vagy fordítva.

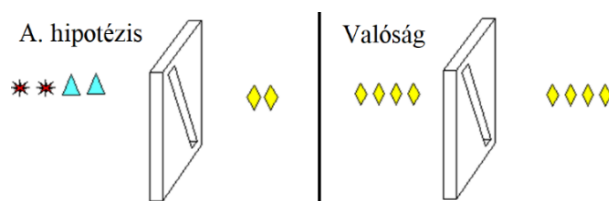
3.3 Az egymást kizáró és nem-kizáró tulajdonságok

Az anyag a fotonok polarizációs tulajdonságának két osztályát különbözteti meg (A. Függelék 5. feladatsor). A fent említett utolsó észrevétel kapcsán, miszerint a függőlegesen polarizált foton nem képes áthaladni a vízszintes polarizátorlemezen (és fordítva), azt mondja, hogy ezek egymást *kizáró tulajdonságok*². Az egymással nem derékszöget bezáró polarizációs tulajdonságok pedig *nem-kizáró tulajdonságok*, hiszen például a függőlegesen polarizált fotonok egy részéből 45°-osan polarizált foton lesz egy 45°-os irányítású polarizátorlemezen való áthaladáskor. Az anyag kérdései számos esetben gyakoroltatják a diákokkal e két tulajdonságpár megkülönböztetését.

3.4 Az A. hipotézis, azaz tekinthető-e a fotonnyaláb különböző tulajdonságú fotonok keverékének?

A $\diamond$ tulajdonságú fotonokra vonatkozóan érdekes felvetés lehet a klasszikus fizika szellemében az, hogy úgy képzeljük el őket, hogy Δ és $*$ fotonok egyenletes keveréke, például 4 foton esetén $\diamond\diamond\diamond\diamond = \Delta\Delta + **$. Ezt nevezzük az *A. hipotézisnek*.

Az anyag egyszerű gondolatmenettel vezeti rá a diákokat arra, hogy ez a vonzónak tűnő hipotézis nem felel meg a valóságnak (A. Függelék 6. feladatsor). Képzeljük el, hogy a 45°-os polarizáltságú nyaláb áthalad egy 45°-os polárszűrőn. A kísérletnek megfelelő eredményt a diákok összehasonlítják a hipotézis helyességét feltételező gondolatmenet kimenetelével. Ha a nyaláb keverék, a polarizátorlemez mindegyik fotonnyalábnak csak a felét engedi át, azaz 4 foton esetén a hipotézis értelmében csak két foton juthatna át a lemezen. Tehát $\diamond\diamond\diamond\diamond \neq \Delta\Delta + **$.



10. ábra: Az *A. hipotézis* tévességének egyszerű bemutatása. A $*$ és Δ tulajdonságú fotonok fele halad át a polarizátorlemezen, így megfelelőzik a számuk. Azonban a $\diamond$ fotonok mindig áthaladnak.

² Észrevehetjük, hogy a tananyag során nem használjuk a fény elektromágneses hullámokkal történő szemléletes képét, ezért nem mondjuk azt, hogy a két fény rezgési síkja egymásra merőleges. Új kifejezéseket használunk, mert nekünk a fotonképből fognak következni a kvantummechanikai törvények.

3.5 A kvantumbizonytalanság és a fotonok megkülönböztethetlensége

Az *A. hipotézist* vizsgálva arra juthatunk, hogy két különböző mérés tulajdonságait nem lehet egyszerre társítani egy fizikai rendszerrel. Az anyag ezt hívja kvantumbizonytalanságnak³ (*A. Függelék 7. feladatsor*). Tehát amikor egy foton találkozik egy polarizátorlemezrel, akkor általában vagy elnyelődik, vagy áthalad. Nem tudjuk, hogy az adott foton éppen át fog-e haladni vagy sem, ezért nem is társíthatjuk hozzá előzetesen ezt a tulajdonságot. Vagyis a mérés pillanatában dől el a fotonok sorsa.

Ebből a gondolatmenetből azt a következtetést is leszűrhetjük, hogy az azonos módon polarizált fotonok esetén a megfelelő polarizátorral való mérés során azonosak a kimenetek, így ezek megkülönböztethetetlenek. Ha meg tudnánk a fotonokat különböztetni, azaz az *A. hipotézis* igaz lenne, akkor az a kvantumbizonytalansággal menne szembe.

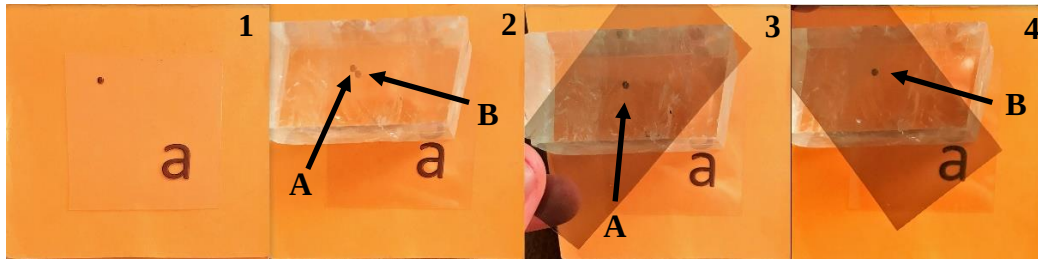
3.6 A pálya fogalmának hiánya

A tananyag itt ismét egyszerű kísérleteket használ (*A. Függelék 8. feladatsor*). A vizsgálódáshoz szükségünk van egy kettőtörő kalcitkristályra. Az ilyen kettőtörő kristályok különlegességei, hogy a beeső fénynyalábot két olyan fénynyalábbá bontják szét, amelyek polarizációs tulajdonságai egymást kizárók. A beérkező fénysugár irányának folytatását ordinárius sugárnak, a másikat extraordinárius sugárnak nevezzük [9]. Ezt eszközeinkkel kísérletileg is ellenőrizhetjük (*11. ábra* és *12. ábra*).



11. ábra: Sematikus rajz a kalcitkristály fénytöréséről.

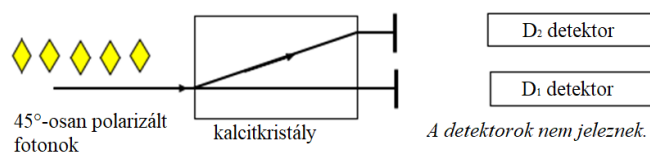
³ A „kvantumbizonytalanság” nem a határozatlansági relációt jelenti. Habár a két kifejezés nagyon hasonlít egymásra, utóbbit a tananyag nem említi.



12. ábra: Diákjainkkal narancssárga háttérre helyeztünk egy fóliát, melyen egy sötét pont (és egy „a” betű) látható (1-es kép). Ha a sötét pontra egy kettőtörő kalcitkristályt helyezünk, akkor a kép megkettőződik (A és B pont), azaz a beeső fénynyalábot kettéválasztja a kristály (2-es kép). A 3-as és 4-es képen a két sötét pont fényének polarizációs tulajdonsága polarizátorlemezekkel ellenőrizhető. Azt tapasztaljuk, hogy a két fénynyaláb polarizációs tulajdonsága egymást kizáró, azaz a polarizátorlemezek helyzete ilyenkor egymáshoz képest merőleges.

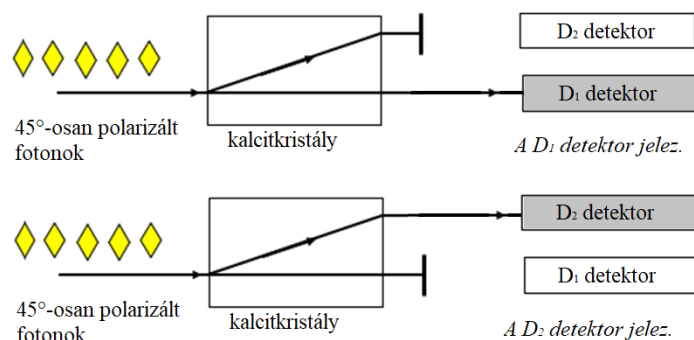
A kísérletek megmutatták, hogy a foton pályája és polarizációja között szoros kapcsolat áll fent. Most képzeletben helyezzünk egy $\diamond$ tulajdonságú fotonnyaláb útjába egy kalcitkristályt, majd az ordinárius és extraordinárius sugarak irányába egy-egy detektort, amely képes érzékelni a beérkező fotonokat. Legyen az ordinárius nyaláb polarizációs tulajdonsága Δ , az extraordináriusé pedig $*$ (ezek így éppen egymást kizáróak). Ezután kövessük a lenti ábráknak megfelelő gondolatmeneteket.

A fotonok biztosan nem követnek más pályát, mint az ordinárius vagy az extraordinárius sugár, mert, ha ezt a két útvonalat egyszerre letakarom, akkor a detektorok nem észlelnek fotonokat. Ezt a 13. ábra szemlélteti.



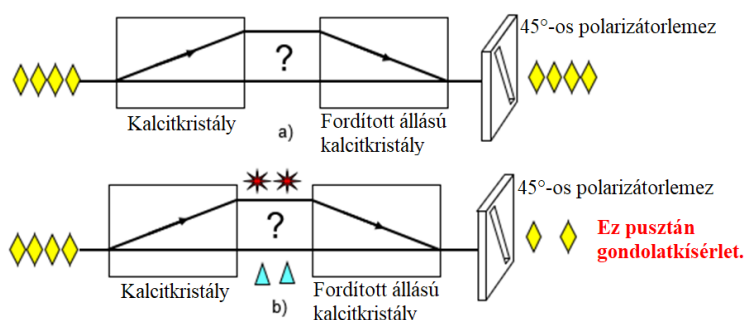
13. ábra: A fotonok biztosan nem haladnak más pályán, mint az ordinárius, vagy az extraordinárius sugár.

Ha a két sugárnyaláb egyikét letakarom, akkor a kilépő fénynyaláb gyengébb a beesőnél, mert csak a fotonok fele jut át a kristályon. A fotonok tehát nem követhetik egyszerre mindkét pályát, hiszen akkor minden foton átjutna.



14. ábra: A fotonok nem követhetik egyszerre mindkét pályát, hiszen a detektorok csak fele akkora intenzitást mutatnak.

Most tegyük a kalcitkristály után egy ugyanolyan, de azzal fordított állásút. Ez a két fotonnyalábot újra egyesíti, ahogy az a 15. ábrán látjuk. Ha feltételezzük azt, hogy egy foton követi a két pálya egyikét, akkor az egyesült fénynyaláb Δ és $*$ tulajdonságú fotonok statisztikus keveréke lesz. Ezeknek azonban csak a fele jutna át a 45° -os polarizátoron. A valóságban azonban mind átjut. Azaz a fotonok nem követhetik egyik útvonalat sem.



15. ábra: Ha gondolat kísérletet végzünk, melyben egy foton polarizációs tulajdonsága meghatározott a két kristály között, akkor a helyét is meg tudjuk mondani. Azonban ekkor az *A hipotézis* eredményét kapnánk, amelyről már megbizonyosodtunk, hogy téves.

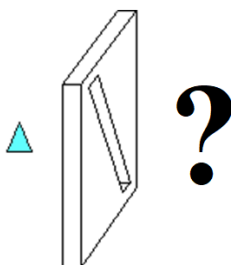
Kísérleteink megmutatták, hogy a fotonokhoz nem lehet pályát társítani. Ez a kvantummechanika egyik fontos törvénye.

3.7 A valószínűségi értelmezés és a JQM szimuláció

Izgalmas kérdés, hogy mi történik akkor, ha egy olyan gyenge intenzitású fénynyalábot bocsájtok egy polarizátorlemezre, hogy egyszerre csak egy foton esik rá.

Mivel a fotonok oszthatatlanok, ezért egy foton vagy áthalad a polarizátorlemezen, vagy nem (16. ábra). De akkor mit fejezhet ki a Malus-törvényben szereplő $\cos^2$? El kell hinnünk, hogy a helyes válasz az, hogy a fotonok áthaladásának valószínűségét jelenti, azaz

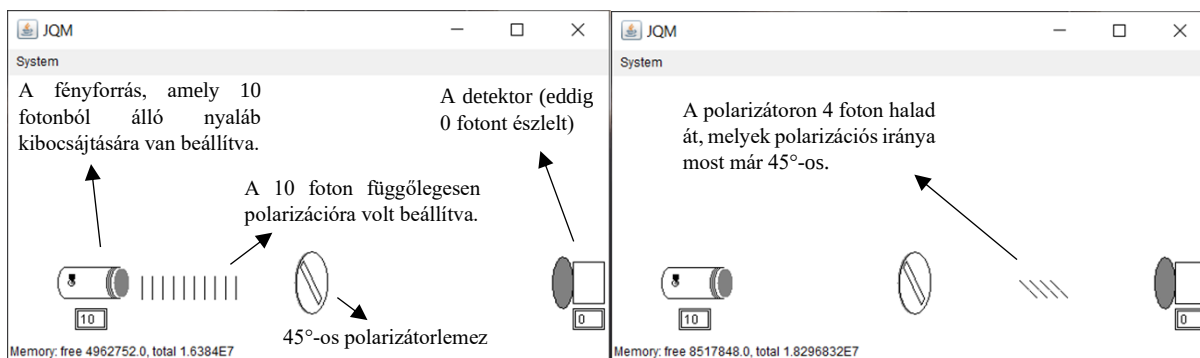
$p(\theta) = \cos^2 \theta$. A valószínűség nagyszámú azonos kísérlet eredményére vonatkozik. Habár ezt az ismeretet a tananyag már korábban kimondta, lényegi elemzése csak most következik (A. Függelék 9. feladatsor).



16. ábra: Mi történik akkor, ha csak egy foton érkezik egy polarizátorlemezre (jelen esetben a polarizátorlemez 45° -os, a beérkező foton pedig Δ tulajdonságú, azaz függőlegesen polarizált)? Ekkor a Malus-törvényben a $\cos^2 45^\circ = 1/2 = p(\theta)$ szerepel, mely a foton áthaladásának valószínűségét jelenti.

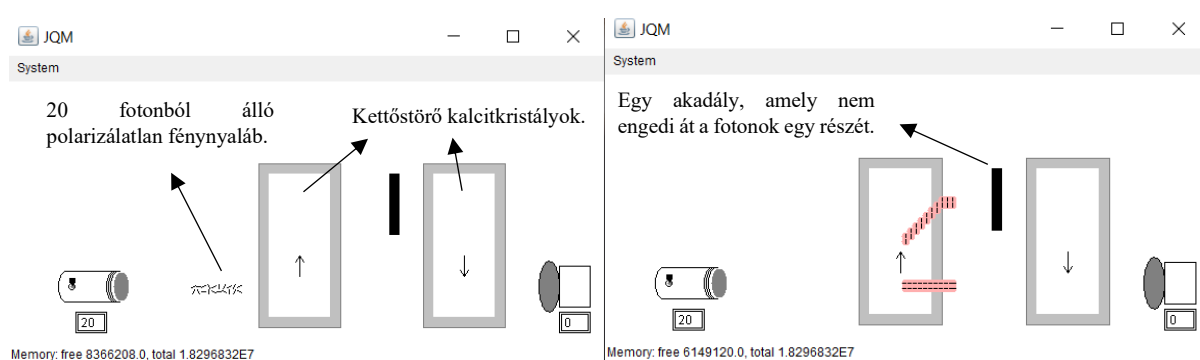
A valószínűségi kijelentés sok azonos kísérletre, vagy egyetlen sok, független fotonból álló fénynyaláb esetére vonatkozik. Ha azonban minden egyes foton $1/2$ valószínűséggel halad át, illetve hal el, akkor egy véges számú fotonból álló nyaláb esetén külön kell meghatároznunk az egész nyalábra vonatkozó lehetséges végkimeneteket. Például, ha 10Δ tulajdonságú foton érkezik egy 45° -os polarizátorlemezre, akkor minden egyes foton p valószínűséggel halad át, azaz több lehetséges kimenetel is lehet. Előfordulhat akár az is, hogy egy foton sem halad át a polarizátorlemezen. Mivel nem szeretnénk, hogy diákjaink „elvesszenek” a matematika útvesztőjében, ezért az anyag a *JQM* nevű szimulációs programot használja [10]. A *JQM* működését a diákok pár perc alatt elsajátították.

A szimulációban beállíthatjuk a fényforrásból kibocsájtott fotonok darabszámát és polarizációs tulajdonságát is. Amikor a fotonok a polarizátorlemezre esnek, akkor egy véletlenszám generátor kisorsolja az egyes fotonok sorsát. A tananyaghoz tartozó feladatsorban különböző példák vannak, melyek lényege, hogy a diákok megjósolják az áthaladó fotonok számát a Malus-törvény korábbi értelmezésével, majd ezt összehasonlítják az egyedi véletlen folyamatokon alapú szimuláció kimenetelével. Tapasztalatként megfogalmazhatjuk, hogy sok beeső foton esetén elég jól megjósolja a Malus-törvény korábbi értelmezése az áthaladó fotonok számát. Egy konkrét példát a 17. ábra mutat.



17. ábra: JQM szimuláció. 10 fotont tartalmazó függőlegesen polarizált fénynyaláb érkezik egy 45°-os polarizátorlemezre. Jól látható, hogy a szimuláció eredménye a korábban tárgyalt Malus-törvényt nem adja vissza (azonban elég közel van hozzá, hiszen 5 helyett 4 áthaladó fotont kaptunk). Ennek oka az egyedi események valószínűségében rejlik.

A JQM arra is lehetőséget nyújt, hogy kalcitkristállyal is foglalkozzunk. A tananyag ezekhez is tartalmaz feladatokat, mellyel a diákok átismételhetik korábbi ismereteiket is (18. ábra).



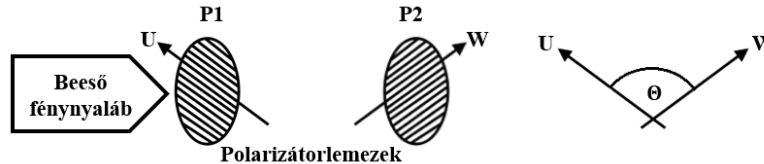
18. ábra: 20 fotonból álló polarizálatlan fénynyaláb esik egy 2 kalcitkristályt tartalmazó rendszerre. A kalcitkristályokon látható nyíl azok irányát jelentik. Jelen esetben egy korábbi feladatot ismételünk át JQM-mel, mely a pálya fogalmának hiányáról szólt.

Fontos megjegyezni, hogy a JQM ezen változata csak animálás, nem tartalmaz valószínűségi szimulációt, az animálás két klasszikus képpel is él: a polarizálatlan fénynyalábot különböző polarizációs irányú fotonok statisztikus keverékeként adja meg, illetve a fotonok egyszerre befutják mindkét pályát (ezt jelzi a piros háttér). Korábban megtanultuk, hogy ezek az *A. hipotézisnek* felelnek meg, ezért hibásak. Olaszországi utam során felhívták arra a figyelmem, hogy ennek kapcsán a diákokkal ismét meg tudjuk beszélni azt, hogy a téves képek annak következményei, hogy a kvantummechanikai effektusok szemléltetéséhez csak klasszikus képeket használtunk.

3.8 Matematikai összefüggések a kvantummechanikában, a szuperpozíció-elve

A tananyag a matematikai összefüggések bevezetésével zárul (A. Függelék 10. feladatsor). Első lépésként megjegyezzük azt, hogy az egységvektorokat vastag betűvel jelöljük, pl: $\mathbf{F}$, $\mathbf{u}$. A polarizációs állapotokat pedig normál betűtípussal, pl: F , u .

Tekintsük a 19. ábrát:



19. ábra: Elhelyezünk két polarizátorlemez egymást mögé (P1 és P2). Ezek polarizációs irányát az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{W}$ egységvektorok mutatják.

Diákjainkkal észrevehetjük, hogy a fotonok áthaladásának valószínűsége éppen a két vektor skaláris szorzatának négyzete:

$$p(\theta) = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W})^2 = (|\mathbf{U}| \cdot |\mathbf{W}| \cdot \cos \theta)^2 = (1 \cdot 1 \cdot \cos \theta)^2 = \cos^2 \theta.$$

A fentiekben az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{W}$ a polarizátorlemezek irányát mutatták. Mivel polarizált fotonokat pont polarizátorlemezekkel tudunk előállítani, jelöljük u -val és w -vel a polarizátoroknak megfelelő fotonok állapotát. Érdemes hozzárendelnünk a fotonok állapotához egy vektort: $\mathbf{u}$ jelentse az u állapothoz, $\mathbf{w}$ pedig a w állapothoz rendelt vektort. Így a fotonok állapotai közötti átmenet valószínűségét már a polarizátorlemezektől függetlenül is felírhatjuk:

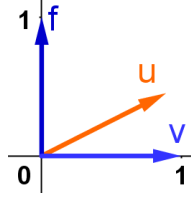
$$p(u \rightarrow w) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 = (|\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos(\theta))^2 = \cos^2(\theta).$$

Jelölésünk az összes korábbi esetet visszaadja, így például a két egymásra merőleges polarizátorlemezen való át-nem-haladást is. Eddig azt mondtuk, hogy ezek a Δ és $*$ tulajdonságok egymást kizárják. Azonban ezt most már szebben is megfogalmazhatjuk: egy foton vízszintes polarizációjú állapotból (v) sosem tud átmenni függőlegesen (f) polarizált állapotba, mert $p(v \rightarrow f) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})^2 = \cos^2(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \cos^2 90^\circ = 0$. Azaz az egymást kizáró tulajdonságoknak egymásra merőleges állapotvektorok felelnek meg.

A tizenegyedikes matematika órákról tudjuk, hogy bármely vektor felírható a bázisvektorok segítségével [11]. Ez most sincs másképp, ha az f és a v állapotokat tekintjük bázisoknak, minden $\mathbf{u}$ vektor felírható, mint az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{v}$ vektorok lineáris kombinációja:

$$\mathbf{u} = \Psi_1 \cdot \mathbf{v} + \Psi_2 \cdot \mathbf{f},$$

melyet **szuperpozíció-elvnek** nevezünk (20. ábra).



20. ábra: Bármely u egységvektor is felírható a bázisok (v és f) lineáris kombinációjaként.

Képezzük a fenti u -val $v \cdot u$ és $f \cdot u$ skalárszorzatokat:

$$v \cdot u = v \cdot \Psi_1 v + v \cdot \Psi_2 f = \Psi_1$$

$$f \cdot u = f \cdot \Psi_1 v + f \cdot \Psi_2 f = \Psi_2.$$

Mivel a skalárszorzatok négyzete az állapotok közötti átmenet valószínűsége, ezért jelen példában a Ψ_1^2 annak a valószínűsége, hogy egy u állapotú fotont a v állapotban találjuk a mérés után, a Ψ_2^2 pedig azt a valószínűséget adja meg, hogy egy u állapotú fotont az f állapotban találjuk a mérés során.

Mivel u egységvektor, ezért

$$u \cdot u = (\Psi_1 f + \Psi_2 v)(\Psi_1 f + \Psi_2 v) = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 = 1,$$

azaz, ha egy u állapotú foton áthalad egy F függőleges (vagy V vízszintes) irányú polarizátorlemezen, akkor a foton biztosan vagy v (vízszintes) állapotú, vagy f (függőleges) állapotú lesz, tehát az egymást kizáró tulajdonságok egyikének megfelelő állapotban.

Alkalmazzuk megszerzett tudásunkat a $\diamond$ tulajdonságú fotonokra. Ha a foton $\diamond$ tulajdonságának az u_{45° állapotvektor felel meg, akkor azt fel tudjuk írni a v és f vektorok lineáris kombinációjaként:

$$u_{45^\circ} = \Psi_1 v + \Psi_2 f = \frac{1}{\sqrt{2}} v + \frac{1}{\sqrt{2}} f.$$

Ekkor annak a valószínűsége, hogy a foton a mérés során a v állapotba kerül (azaz nem haladna át egy függőleges polarizátoron): $p(u_{45^\circ} \rightarrow v) = (v \cdot u_{45^\circ})^2 = \Psi_1^2 = 1/2$.

Ha egy u_{45° állapotvektorral reprezentált foton találkozik egy tetszőleges W irányú polarizátorlemezrel (vagyis mérést hajtunk végre), akkor a $u_{45^\circ} \rightarrow w$ állapotok közötti átmenet p valószínűsége számolható:

$$\begin{aligned} p(u_{45^\circ} \rightarrow w) &= (w \cdot u_{45^\circ})^2 = (w \cdot (\Psi_1 v + \Psi_2 f))^2 = (\Psi_1 w \cdot v + \Psi_2 w \cdot f)^2 = \\ &= \Psi_1^2 (w \cdot v)^2 + \Psi_2^2 (w \cdot f)^2 + 2\Psi_1 \Psi_2 (w \cdot v)(w \cdot f). \end{aligned}$$

Ha az A . hipotézis igaz lenne, akkor a $2\Psi_1 \Psi_2 (w \cdot v)(w \cdot f)$ vegyes tag nem jelenne meg, vagyis ismételten meggyőződünk arról, hogy az A . hipotézis téves.

4. Mit tanít meg az anyag?

A mostani fejezetben összefoglalom a tanult ismereteket, azonban itt már nem a középiskolások nyelvezetét használom. Céлом, hogy egy más perspektívából tekintsünk a tananyagra. A megtanult ismeretek összefoglalása során lesznek olyan részek is, ahol az egyetemen tanultakkal vetem össze azt, így rávilágítva a legfontosabb szempontokra, melyekre a tanítás során figyelni kell.

A tananyag elején megismerkedtünk a fénypolarizáció jelenségeivel. Ezek között volt néhány kiemelten fontos eredmény.

Ha fény esik egy két polarizátort tartalmazó rendszerre, akkor csak a két polarizátorlemez által bezárt szögtől függ az áthaladó fény intenzitása. Ezt először egy klasszikus fizikai törvénnyel, a Malus-törvénnyel fogalmaztuk meg: $I_T = I_0 \cos^2 \theta$.

Ezt követte az, hogy a fényintenzitás arányos a fotonszámmal, tehát $N_T = N_0 \cos^2 \theta$. Végül feltettük a kérdést, hogy vajon egy foton esetén mit jelenthet a $\cos^2 \theta$, melyre elfogadtuk, hogy a foton áthaladásának valószínűsége a válasz, mellyel elsőként fogalmazódott meg a valószínűségi szemlélet szükségessége.

A későbbiekben a matematikai formalizmussal viszont lehetőség nyílt az állapotvektorok nyelvén történő megfogalmazásra is: a fotonok állapotai közötti átmenet valószínűségét $p(u \rightarrow w) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 = \cos^2(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ skaláris szorzat adja meg.

Természetesen tudjuk, hogy valójában az átmenet valószínűségét a $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}|^2$ adja meg [12], ám kizárólag olyan esetekre szorítkoztunk, ahol az abszolútérték nem lényeges, hiszen a vektortér a valós számok felett értelmezett (azaz nem foglalkoztunk a cirkuláris polarizációkkal [13]). Így elkerültük az abból adódó problémákat, hogy a középiskolás tananyagnak nem részei a komplex számok.

Munkánk során két vektor skaláris szorzata kommutatív volt (mivel valós számok felett volt a vektortér), azonban mint tudjuk a Hilbert-tér elemeire ez nem igaz általánosan: $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ [14]. A kommutativitással viszont ismét elkerültük a komplex számokból adódó nehézségeket (komplex konjugált), ugyanis középiskolában a skaláris szorzás kommutatív volt.

Megtanultuk, hogy a fénynek létezik polarizációs tulajdonsága. Egyetemi tanulmányainkból tudjuk, hogy ezt a fotonok polarizációs állapota írja le [15]. Ez nyújtotta azt a lehetőségeket, hogy az állapotvektorok 2 dimenziósak legyenek, hiszen a foton polarizációs állapotát két bázis írja le: $|\psi\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|f\rangle$, melyet szuperpozíció elvének neveztünk.

Ezt követően a fotonképpel ismertettük kísérleteinket. A polarizációs tulajdonság értelmezéséhez a fotonokhoz szimbólumokat rendeltünk. Mint tudjuk a tulajdonságok meghatározására mérést kell végeznünk, tehát a polarizációs tulajdonságok már a mérések következményei. Azonban most már tudjuk, hogy egy kevert állapot közvetlenül nem mérhető. Éppen ez okozza azt, hogy klasszikus fizikai intuíciónk gyakorta cserben hagy minket.

Megtanultuk, hogy vannak olyan esetek, amikor a foton biztosan nem halad át a polarizátorlemezen. Ekkor azt mondtuk, hogy például a vízszintes és függőleges polarizációs tulajdonság közötti átmenet nem lehetséges, mert ezek egymást kizárják, ezzel vezetve elő az ortogonális állapotvektorok fogalmát. Természetesen azt is láttuk, hogy vannak nem-kizáró tulajdonságok is, amikor az átmenet valószínűsége nem zérus.

Megismertedtünk egy izgalmas klasszikus fizikai intuíciónkra illeszkedő hipotézissel, mely az *A. hipotézis* névre hallgatott. Ekkor a kevert állapotú fotonokat megpróbáltuk bizonyos tulajdonságok statisztikus keverékével előállítani. Azonban számos példán meggyőződhetek diákjaink ennek téves mivoltáról. A gondot az okozta, hogy a szuperponált állapotban lévő fotonok másik állapotba történő átmenetele során *általában* megjelenik egy interferencia tag (piros jelzés):

$$\begin{aligned} p(u \rightarrow w) &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 = (\mathbf{w} \cdot (\Psi_1 \mathbf{v} + \Psi_2 \mathbf{f}))^2 = (\Psi_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \Psi_2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{f})^2 = \\ &= \Psi_1^2 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})^2 + \Psi_2^2 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{f})^2 + 2\Psi_1 \Psi_2 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Ezt követően a kvantumbizonytalanságot mondtuk ki. Ez azért volt lényeges, mert itt összegeztük a kísérleti tapasztalatainkat, azaz, hogy nem lehetséges különböző tulajdonságokat egyidejűleg társítani egy kvantumrendszerrel. Továbbá ez, és az események valószínűségi jellege miatt a fotonok megkülönböztethetlenségét is kimondtuk. Tudjuk, hogy a több foton leíró hullámfüggvény szimmetrikus, azaz a fotonok felcserélése során a hullámfüggvény ugyanaz marad. Ezért elvileg sem különböztethetők meg a részecskék [16].

Bemutattuk polarizátorlemezekkel, hogy csak két egymást követő polarizátorlemez sorrendje számít, mely ismét a fotonok állapotai közötti átmenettel volt összhangban. Itt azt is láthatták a diákok, hogy a műveletek nem felcserélhetők. A polarizátorlemezzel való kölcsönhatás pedig tekinthető egy mérésnek. Egyetemi tanulmányainkból tudjuk, hogy a polarizátorlemezekhez operátorok rendelhetők. Az ezekkel, a 2x2-es mátrixokkal elvégzett szorzás nem kommutatív, tehát valóban nem cserélhetők fel a polarizátorlemezek helyzetei. Az operátorok sajátvektorai a polarizátorlemez irányára párhuzamos, illetve merőleges egységvektor. Sajátértékei pedig a mért értékek, melyek a +1 és a -1 lehet. Előbbi a fotonok áthaladását jelenti, azaz, hogy a polarizátorlemezzel párhuzamos egységvektor bázisába

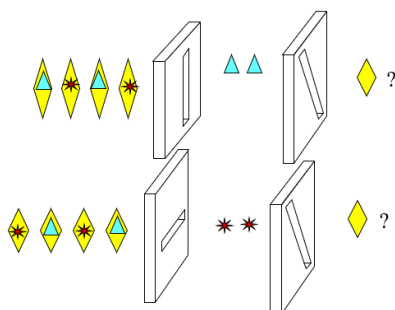
„zuhan” a foton, utóbbi pedig a rá merőleges egységvektorhoz tartozó mért érték, azaz a foton át-nem-haladását jelenti.

A kalcitkristállyal elvégzett kísérletek során diákjainknak megmutattuk, hogy a pálya fogalma milyen ellentmondásokkal jár. Megtanultuk tehát, hogy a pálya fogalma nem helytálló a mikrovilágban, mert csak méréssel határozhatjuk meg egy objektum helyét, azonban azzal már a részecske elveszti a szuperponált állapotát.

A tananyag a matematikai formalizmussal zárt, mely a megértett törvények elmélyítését segítette elő. Kimondható, hogy a Dirac által bevezetett jelölésrendszer ilyen formában történő használata jól alkalmazható a középiskolában, mert az állapotvektorok a valós számok feletti 2 dimenziós vektortér elemei. A vektorokhoz társítani tudták a diákok a polarizátorlemezek irányait megadó egységvektorokat, így olyan absztrakciós szintre hoztuk le a fogalmakat, amelyek a diákok számára is érthető. Az egyik legfontosabb diákok által megértett tanulság, hogy a kevert állapotokkal nem társítható, a bázist alkotó egyik tiszta állapot sem, s a szuperpozíció az állapotok szintjén érvényes, a valószínűségek szintjén azonban nem. Tehát megtapasztalták, hogy a mikrovilágban mennyire különösek a természeti törvények.

5. Tanítási tapasztalatok, eredmények

A tananyag bizonyos részeit tudatosan kihagytam. *Alberto Stefanel*⁴ javaslatára a *B hipotézist* elhagytam, mely a rejtett paraméterek elvén alapszik. Ez azt jelenti, hogy egy foton egyszerre több tulajdonsággal is rendelkezik, s a polarizátorral való találkozás során elveszíti a nem megfelelő tulajdonságokat. Ezt, és annak téves mivoltát a 20. ábra szemlélteti. A *B. hipotézis* elhagyása mellett szóló érv az volt, hogy erre a diákok önmaguktól nem gondolnának, ezért csak nehezíti a haladást. Egy másik kihagyott rész a fizikai mennyiségeket reprezentáló operátorokkal való műveletvégzés volt. Ennek elhagyása a saját döntésem volt, talán a későbbiekben ezt is megpróbálom tanítani.



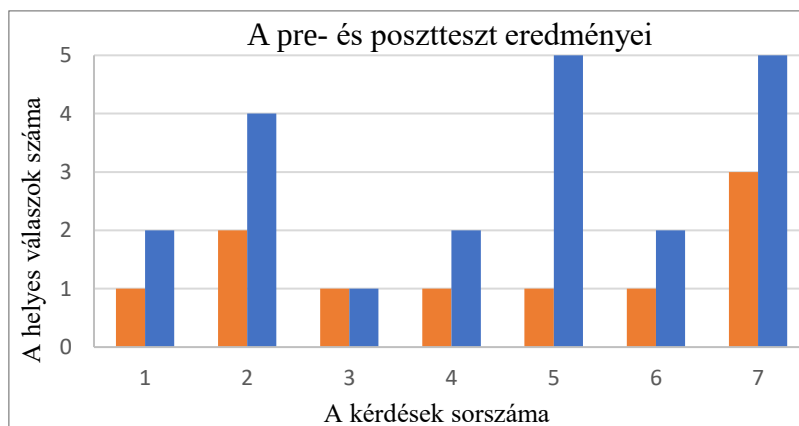
20. ábra: A *B hipotézis* szemléltetése és annak ellentmondása a valósággal. A fotonok egyszerre több tulajdonsággal is rendelkeznek. A példában 4 foton esik egy függőleges (vízszintes) polarizátorlemezre. A 4 foton egyik fele egyszerre rendelkezik a $\diamond$ és Δ tulajdonságokkal, a másik fele pedig egyszerre rendelkezik $\diamond$ és $*$ tulajdonságokkal. Jól látható, hogy amikor függőleges (vízszintes) polarizátorlemezre esnek a fotonok, akkor 2 halad át, mert csak kettő rendelkezik az áthaladáshoz szükséges Δ ($*$) tulajdonsággal. Azonban, ha ezután helyezünk egy 45° -os polarizátorlemezre, akkor már egy sem haladna át, mert már egynek sincs az áthaladáshoz szükséges $\diamond$ tulajdonsága, így ellentmondásra jutunk, mert a valóságban 1 foton áthaladna.

A szakkört egy preteszt kitöltésével kezdtük, melyet a tananyag végeztével újra megírtak a diákok. A teszt kérdéseinek egy részét a tananyag kidolgozóitól vettem át [17], néhányat pedig saját magam írtam. Így összevethetővé vált előzetes és utólagos tudásuk. A kurzuson résztvevő 5 hallgató mindegyike végzős gimnazista és fizika fakultációra jár. Ezért mindegyikük találkozott korábbi fizika óráin fénypolarizációval és „kvantummechanikával”.

⁴ Az olasz kutatócsoport egyik tagja.

A preteszt kérdései az *B. Függelék*nél találhatók meg. A függelékben kiegészítésként a válaszokat a kérdések után zárójelben tüntettem fel.

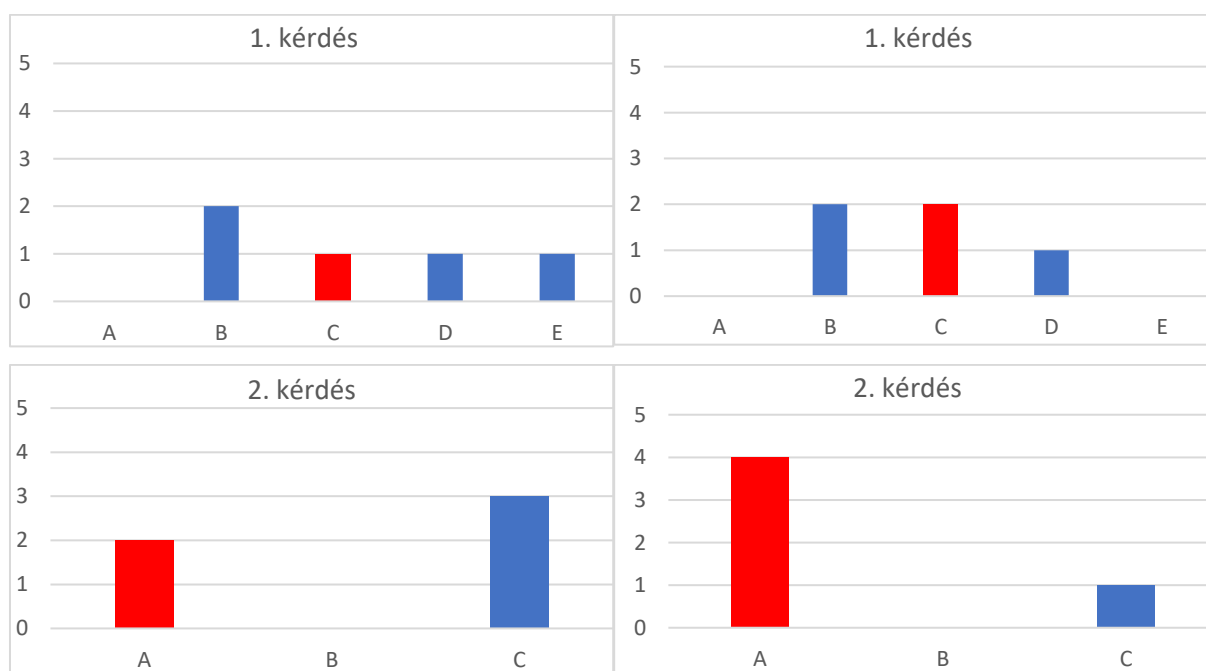
A diákok pre- és posztteszten adott helyes válaszainak oszlop diagrammon való szemléltetését láthatjuk a 21. ábrán.

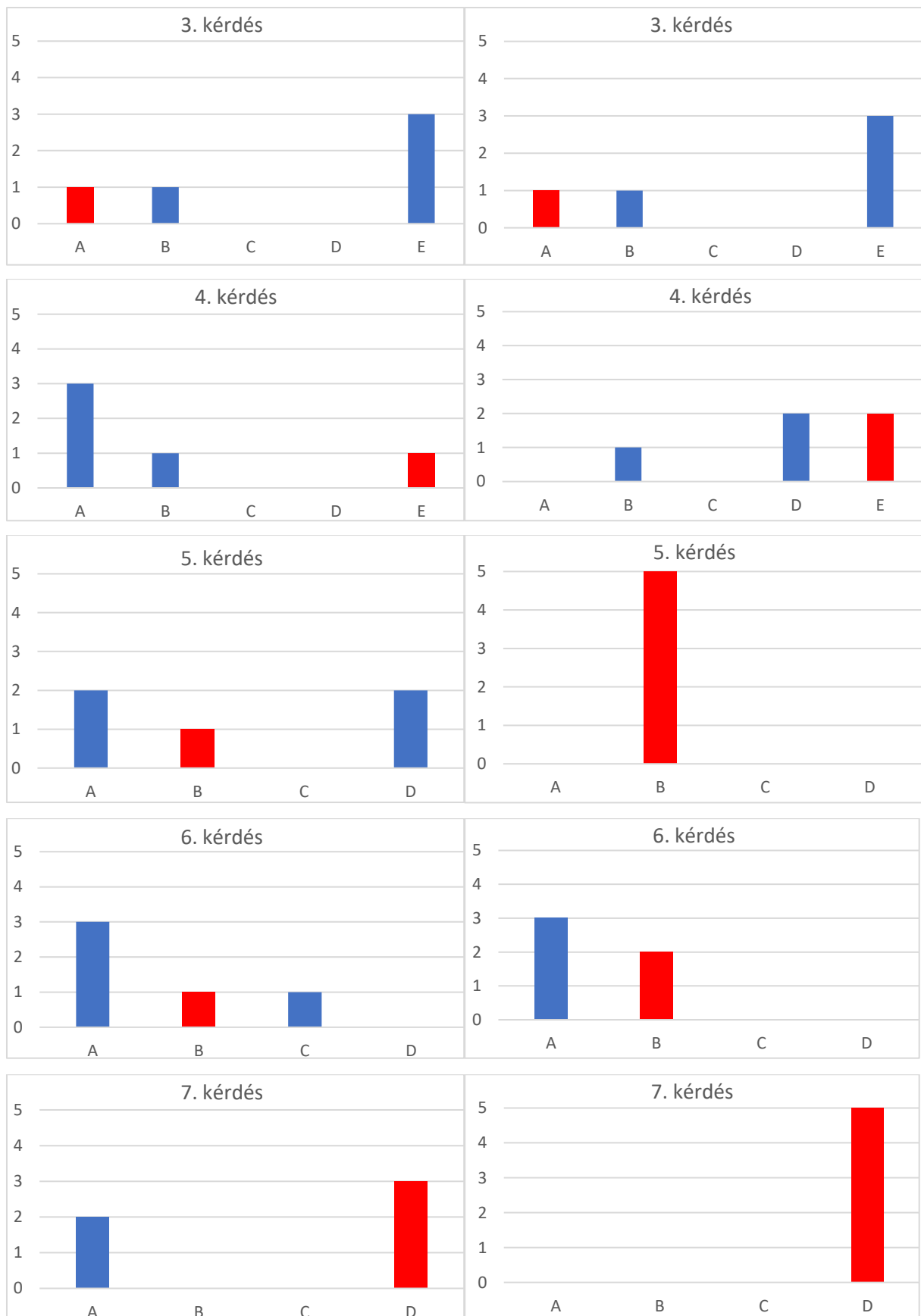


21. ábra: A preteszt eredményeit a piros, a posztteszt eredményeit a kék oszlopok mutatják a diagrammon (5 fő).

A 21. ábra eredménye azt mutatja, hogy a harmadik kérdés kivételével mindenütt előrelépés történt, a diákok tehát lényeges dolgokat megértettek.

Az egyes feladatokra adott válaszok eloszlását pedig a lenti diagrammok mutatják. A helyes megoldás a piros szín jelöli. Az első oszlopban a preteszten adott válaszokat láthatjuk, mellette pedig a posztteszten adott válaszok eloszlását.





A tananyag eredményességéhez hozzátartozik, hogy a tanfolyamot szakkör formájában végeztük el. Ezért sem számonkérés nem volt, sem házi feladatot nem kaptak a diákok. Sokszor sajnos csak a 9. órában volt lehetőségünk találkozni, továbbá nekem is ez az első tapasztalatom a téma tanításában, ezért ezeket érdemes figyelembe venni az eredménynél. Az 5 diák képességei vegyesek voltak. Volt kimondottan tehetséges, viszont volt gyengébb képességű tanuló is. A tanítás során tudatosan törekedtem arra, hogy a pre- és posztteszt kérdéseit közvetlenül ne válaszoljam meg, mert a célom az volt, hogy a diákok kvantummechanikai gondolkodásának fejlődését ellenőrizsem.

A tesztek eredményei mindenképpen javulást mutatnak. Ha az 1. kérdésnél (mely a kvantummechanikai mérésre sajátosságára kérdez rá) a B válaszlehetőséggel (miszerint a mérések kimenetelét csak valószínűségekből adhatjuk meg) elfogadóbbak vagyunk, akkor összességében jó eredmények születtek.

A 2. kérdésre is helyes válaszok érkeztek, amely a feldobott pénzérme kimenetelének valószínűség jóslatát és a kvantumrészecskék valószínűségi leírását hasonlította össze.

A 3. kérdésnél nem történt változás, mely a határozatlansági relációval foglalkozott. Erre az lehet a magyarázat, hogy ez a témakör nem része a tananyagnak, hanem csak a máshonnan hallott ismeretekre kérdez rá.

A 4. kérdés, mely a kvantumrészecskék pályájára kérdez rá, meglepő eredménnyel szolgált, ugyanis jobb eredményre számítottam. Megkérdeztem az egyik diákot, miért a D opciót (azaz, hogy nem lehet pályát rendelni a részecskékhez a mérés miatt bekövetkező zavaró hatások miatt) választotta, melyre azt felelte, hogy „ha megfigyelnénk a két kalcitkristály között a fotonokat, akkor már bizonyosak lehetnének azok pályájában. Tehát a mérés miatt bekövetkező hatások nem teszik lehetővé a pálya fogalmának használatát.”. Úgy gondolom az érvelés helyes, azonban a megfelelő válasz az E lehetőség volt, miszerint még elvileg sem lehet a részecskékhez pályát rendelni. A jövőben érdemes lehet a mérés hatásáról részletesebb beszélgetést folytatni a tanítás során.

Az 5. kérdés csak a begyakoroltakra kérdezett rá, mely a hibátlan válaszadásban meg is mutatkozott. Levonható a következtetés, hogy a diákok az órai tananyagból megtanulták, hogy ha egy kalcitkristály által szétbontott két fénynyalábot újra egyesítjük egy fordított állású kalcitkristállyal, akkor a rendszerre beeső fénynyaláb polarizációs tulajdonságával megegyező fénysugarat kapunk.

A 6. kérdést szándékosan tettem bele a tesztsorba, mely a korrespondencia-elvre kérdez rá. Kíváncsi voltam, hogy vajon a diákok milyen arányban képesek felismerni maguktól azt, hogy a Malus-törvény kvantummechanikai átlagaként jelenik meg. A válaszokból úgy látom,

erre érdemes lehet a jövőben részletesebben kitérni, melyre a 6. fejezetben adok javaslatot. Véleményem szerint a korrespondencia-elv megértése hasznos, belátni azt, hogy a klasszikus fizika a kvantummechanika határeseteként előáll, a természettudományos látásmódhoz, illetve a modern fizika megítéléséhez is szükséges.

A 7. kérdés a fotonok polarizátorlemezen történő áthaladásának jelenségére kérdezett rá. A diákok hibátlan válaszadása megmutatja, hogy a jelenséget megértették.

A 8. és 9. kérdés kifejtős volt. Nem volt könnyű dolga a diákoknak, mert ezekre a kérdésekre a foglalkozásokon nem tértem ki. A matematikai formalizmusnál csak nagyon röviden említettem meg a fizikai állapot fogalmát. A fizikai állapot fogalmára kérdező 8. kérdésre érkezett néhány válasz:

„Klasszikusan egy adott anyagi dolog helyét és pozícióját egzaktul meg lehet állapítani, míg a kvantumvilágban nem.”

„A klasszikus fizikában egy test fizikai állapotát, a térbeli helyzetéről és a rá ható erőkből írhatjuk le. A kvantummechanikában egy részecske fizikai állapotát a térbeli elhelyezkedéséről és a polarizációs tulajdonságáról írhatjuk le.”

„Klasszikus fizikában az az állapot, amit méréssel megállapítva majdnem mindig ugyanazt kapjuk. A kvantummechanikában viszont mindig mást, nagyon ritkán van ugyanolyan érték.”

„A klasszikus fizikában van néhány adat, ami leírja a testet. A kvantummechanikában egy vektor van, amiből valószínűséget számolhatunk.”

A válaszokból látszik, hogy a tulajdonság és állapot közötti különbség meglétét pontosan érzékelték. A fogalom mélységét a legtöbb diáknak azonban nem sikerült elsajátítania. Úgy gondolom, hogy a matematikai formalizmus részre kevés időnk jutott. A feladatokkal jól boldogultak, számolásaik jól sikerültek, a műveleteket elsajátították. Sajnos az a néhány feladat, amely előkerült, kevés volt a fogalmak berögződéséhez (körülbelül 40 perc alatt végeztünk az egész feladatsorral). A tananyag ezen részét érdemes lehet kiegészíteni gyakorló feladatokkal.

A 9. kérdésben az elektromágneses hullámok fotonokkal történő értelmezésére kérdeztem rá. Az érdeklődve várt válaszok közül néhány:

„foton áthaladási valószínűséggel”

„hogyan egy foton halad át a polarizátoron”

„a fény kettős természetével, a foton rezeg magában”

„A fotonok egyszerre részecske és hullámtermészetűek, és kiderítettük, hogy van egy bizonyos polarizációs tulajdonsága, amit polarizátorokkal változtathatunk meg. Ebből kiindulva az elektromágneses hullámoknak is lehet ilyen tulajdonságuk.”

„valószínűségi hullámként”

Két válasz is mutatja a normál fizika órák során megtanult hullám-részecske kettőséget. A posztteszt után az egyik diákkal 20 perces beszélgetést folytattam, ahol a gimnáziumi tanórákon hallottakra próbált értelmezést találni. A beszélgetés során megfigyeltem, hogy a kvantumrészecskéket a diák úgy képzei el, hogy egyszer vízhullámként, egyszer részecskéként tekint rá (kettős-rés kísérletet fel is hozta példaként). A diák arra is nagyon kíváncsi volt, hogy a hullámfüggvényt hogyan lehetne megérteni, melyről már hallott. Azonban az olasz tananyag a mi közoktatásunkban előkerülő bizonyos problémákra nem ad választ.

A tanítás tapasztalataként azt fogalmazhatom meg, hogy habár a gimnáziumi fizika tananyag része a fénypolarizáció, a diákok egyáltalán nem tudták korábban megszerzett ismereteiket hasznosítani. Mivel az emberi szem nem képes érzékelni a fény polarizációs tulajdonságát, a diákok intuitívan összemosták a polarizációt a fényerősséggel. Érdekesség, hogy előzetesen meg tudták fogalmazni, mi a különbség a két fogalom között, azonban a példánál mégis azonos hibákat vétettek, mely éppen a két fogalom megkülönböztetésének hiányát igazolta. A feladatsorokban található kísérletek lehetővé tették, hogy a polarizáció jelenségét megértsék, jóslataik helyessé váljanak. Pár példa a diákok tévedésekre, mely rámutat ezen nehézségekre:

Az A. Függelék 1. feladatsorának C2.3. kérdése így szólt:

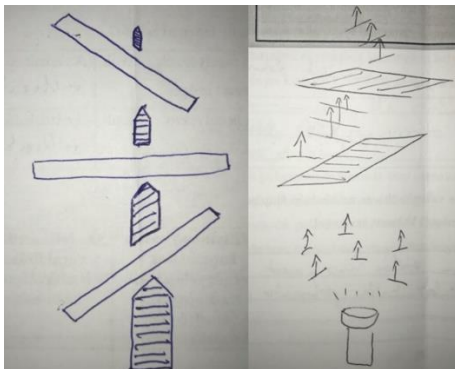
„Egy harmadik polarizátorral megnézzük a második polarizátoron áthaladó fény polarizációját. Mi határozza ezt meg?”

Mind az 5 diák a harmadik válaszlehetőséget jelölte meg, miszerint *„Az írásvetítőre lerakott két polarizátor egymáshoz viszonyított helyzete”*. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy előzetes ismereteik a fénypolarizációról kevésnek bizonyultak ahhoz, hogy a feladatok alkalmazásánál helyesen válaszoljanak. A válasz indoklásánál a fényerősség csökkenésére hivatkoztak.

A diákok mindegyike elrontotta az A. Függelék 1. feladatsor F1.2. és F2.2. feladatait. A kérdés a kísérletek elvégzése előtt arra várt választ, hogy ha két, egymásra merőleges irányú polarizátorlemez közé behelyezünk egy harmadikat (úgy, hogy annak iránya nem merőleges egyikre sem), akkor az áthaladó fény intenzitása mekkora lesz. Hibás indoklásuk úgy szólt, hogy mivel már van két egymásra merőleges helyzetű polarizátorlemez, ezért a rendszeren nem fog fény áthaladni.

Természetesen a diákokkal a helyes megoldásokat megbeszéltük, kísérletekkel ellenőriztük, s a későbbiekben meggyőződtem arról, hogy a polarizáció jelenségét megértették.

Az A. Függelék 1. feladatsor E1. feladatánál először szkeptikus voltam abban, hogy képesek lesznek a diákok kitalálni egy jelölést arra, hogy szemléltessük a fény három tulajdonságát: polarizáció, terjedés iránya, fényintenzitás. Azonban a válaszok magukért beszélnek, nagyon kreatív megoldásokat adtak. Ebből kettőt mutatok be a 21. ábrán.



21. ábra: Két önálló megoldás arra a kérdésre, hogyan lehetne a fény három tulajdonságát (polarizáció, terjedés iránya, fényintenzitás) egy ábrán szemléltetni. Az első rajzban a nyíl iránya mutatja a terjedés irányát, a nyíl alján található vonal a polarizáció irányát, a nyilak darabszáma a fény intenzitását. A második rajzban pedig a nyíl iránya a terjedés iránya, a nyílban található vonalak a polarizáció irányát (az első nyilat elrontotta, mert az írásvetítőből polarizálatlan fény jön ki), a nyíl mérete pedig a fényintenzitást.

A Malus-törvény megértése a diákoknak nem okozott gondot. Azonban a lemezek T áteresztőképességének vizsgálata úgy gondolom szükségtelen. A diákok önmaguktól az ideális polarizátor esetére hagyatkoztak. Ebben az is megerősítette őket, hogy a Malus-törvény mérési eljárása ideális polarizátorlemezeket feltételezett. Ráadásul a feladatsorokon az ideális polarizátorok és a valós polarizátorok esete szinte véletlenszerűen váltogatja egymást. Sok esetben már a diákok sem tudták követni, mikor melyik eset van érvényben.

A bizonytalansági elvnel (A. Függelék 7. feladatsor) a diákok nem voltak képesek az önálló munkára. Viszont közös gondolkozással megoldottuk a feladatokat és úgy gondolom megértették a diákok a kitűzött célokat. Érdekességgént egy gondolatot emelek ki az órán elhangzott beszélgetés részleteként:

„Ha egy 45° -osan polarizált foton ráesik egy függőleges irányú polarizátor lemezre, akkor a foton $1/2$ valószínűséggel halad át (tehát függőlegesen polarizált lesz), illetve $1/2$ valószínűséggel nyelődik el (vagyis vízszintesen polarizált lesz). Tehát a mérés pillanatában dől el a foton sorsa. Nem lehet előzetesen társítani az egyes fotonokkal az áthaladás utáni tulajdonságot.”

Gondolatom az egyik diákban megmaradt, ezért másnap felkeresett. A konkrét példából kiemelte azt, hogy a foton elnyelődése során vízszintesen polarizált lesz. Érdeklődve kérdezte, hogy ez tényleg így van-e, vagy csak rosszul fogalmaztam, mert ő a fotonok elnyelődéséhez semmiféle polarizációs tulajdonságot nem társított. Érdekesnek tartotta, hogy egy megsemmisült fotonhoz miért is kellene bármiféle tulajdonságot hozzárendelni.

A megfogalmazásom mögött az állt, hogy a jelenség magyarázata közben a kvantummechanikai formalizmus volt a fejemben. Egy kever állapotú u_{45° foton felírható a vízszintes és függőleges állapotokat reprezentáló vektorok lineáris kombinációjaként. A 45° -os polarizátorlemezrel történő mérés matematikailag éppen annak felel meg, hogy a foton állapota egy bázisának állapotába kerül, tehát vízszintes vagy függőleges polarizációjú lesz. Az elnyelődésnek tehát az $u_{45^\circ} \rightarrow v$ állapotátmenet felel meg, mely szavaimban megjelent. Természetesen egy elhalt fotonhoz tényleg értelmetlen bármiféle tulajdonságot hozzárendelni, viszont a matematikai formalizmusra való felkészítés céljából vajon érdemes lehet ezt megtenni?

A pálya hiányának (A. Függelék 8. feladatsor) tanításában többször problémát okozott, hogy a feladat kísérletileg megvalósítható, eszközeink mégsem tették lehetővé arról meggyőződhetünk. Két kalcitkristállyal a nyalábok egyesítése kimondottan kihívás volt (a kalcitkristályon található repedések miatt), azonban az áthaladó fénynyaláb polarizációs tulajdonságának megállapítása végképp nem sikerült, mert túl halvány volt a kilépő fénysugár. Ezért a feladatok során felhasználtuk azt a tényt, hogy ha egy kalcitkristály után elhelyezek egy azzal fordított állásút, akkor a beeső fénynyalábbal megegyező polarizációs tulajdonságú fény halad át a rendszeren. Így pusztán elfogadták, hogy a két kettőtörő kristályból alkotott rendszerre eső fénynyalábbal megegyező polarizációjú a kilépő fénynyaláb is.

Az elméletben, miszerint a kvantumrészekkékhez nem rendelhetünk pályát, elsőre könnyű volt. Valószínűleg ebben közrejátszott az is, hogy feltételezték a pálya fogalmának hiányát az egyéb kvantummechanikáról szerzett ismereteiről. Azonban amikor a következő órán a Malus-törvény valószínűségi értelmezését a JQM program használatával egybekötöttük, gyakorta kerültek elő a pálya fogalmával kapcsolatos problémák. Problémát okozott az is, hogy miként is működik a kalcitkristály. A körülbelül 20 perces folyamatos „vita” során dülőre jutottunk, úgy gondolom a diákok megértették az A. hipotézist. Érvelésemben kimondott szerepet játszott az, hogy gondolataikat ellentmondásra vittem, s állításaimat a szimuláció segítségével ellenőrizni is tudtunk. Az egyik felvetett problémára való válaszolás nekem is nehézséget jelentett:

„Mi van, ha éppen azért nem tudjuk, hogy hol van a foton a két kalcitkristály között, mert ismereteink hiányosak.”

Végülis abban maradtunk, hogy nem tudunk biztos információt rendelni a fotonokhoz.

A tananyag matematikai formalizmussal zár (A. Függelék 10. feladatsor). Első megjegyzésem, hogy a diákoknak szokatlan volt a függőleges és vízszintes vektorok $\mathbf{f}$ -fel és $\mathbf{v}$ -vel történő jelölése, melyet már a polarizációs kísérleteknél is megfogalmaztak. Absztrakciós szintjük már elérte azt a szintet, hogy koordináta-rendszerben gondolkodjanak, s a szögeket irányított szöggént értelmezzék. A bázisvektoroknál szimpatikusabb lett volna nekik a matematikaórákon megszokott $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ vektorok használata.

Meglepődve tapasztaltam a szuperpozíció elvénél, hogy a diákok értik, s a vektorok felbontásával kapcsolatos tapasztalataik alapján könnyedén számolják ki a fotonok állapotai közötti áthaladás valószínűségét. Az A. Függelék 10. feladatsor 2. részének C kérdései nem voltak megemészthetők, mely az A. hipotézis tévedését mutatta be a matematikai formalizmussal. Talán több feladat ezen a lapon hasznos lett volna.

A tanórák során az A. hipotézis nem volt elég népszerű, ezért sokszor elmaradtak a jelenségekre való rácsodálkozások. A jövőben tehát nagyobb figyelmet kell fordítanom ennek bemutatására, mivel az ismeretterjesztő filmek és a gimnáziumi tananyag látszólag izgalmasabbnak tűnő példákat hoznak a kvantumeffektusok csodáira.

6. Személyes észrevételek

Ebben a fejezetben a tananyagot saját ötletekkel egészítem ki.

Úgy gondolom a tananyag kiválóan szemlélteti a természettudományos megismerés egyik módját, az induktív felfedezést. Amikor a Malus-törvénynél a $\cos^2 \theta$ szorzótényező szerepét elemeztük egy foton esetén, akkor elfogadtuk azt, hogy ez a foton áthaladásának valószínűségét adja meg. Természetesen ez a lépés nem következik logikailag a Malus-törvényből, pusztán megérzés. Viszont, ha ezt elfogadjuk, látjuk, hogy nagy számú fotonok esetén visszakapjuk a klasszikus fizikai törvény helyességét. Ezzel gyönyörűen szemléltethető a természettudományos megismerés induktív útja.

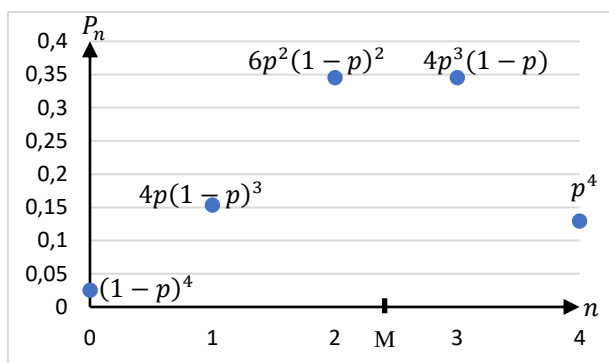
Ebből viszont az is következik, hogy a Malus-törvénnyel megadott biztos események (például az, hogy egy függőlegesen polarizált foton áthalad egy függőleges polarizátorlemezen) sem feltétlenül igazak. A Malus-törvény klasszikus mivolta miatt csak nagyszámú fotonokra ad helyes jóslatot. Azonban miért is ne lenne elképzelhető nagy számú fotonból álló nyaláb esetén az, hogy 1-1 foton még sem jut át a polarizátorlemezen, annak ellenére, hogy polarizációs tulajdonsága ezt lehetővé tenné? A gond éppen abból adódik, hogy ilyen kicsi eltérést a makroszkopikus mérőműszerek nem lennének képesek kimutatni. Természetesen ezek a feltevések hasznosak és a kvantummechanikai leírás során kiderül az is, hogy igazak. Emellett pedig a megértést is segítették. Tanárként azonban érdemes lehet tisztába lenni azzal, hogy miként és hogyan „csaltunk”. Ezeknek a titkoknak az elárulását azonban legfeljebb a tananyag végén érdemes megtenni.

Második észrevételem, hogy a tananyag a Malus-törvény valószínűségi jelentését nem használja ki érdemben. Diákjaink legfeljebb azt a klasszikus jóslatot használják, hogy a $\cos^2 \theta$ az áthaladó fotonok várható értékét adja meg. A várható érték pontatlanságát pedig a *JQM* programmal ellenőrzik. Úgy gondolom a diákok matematikai ismeretei lehetővé tennék azt, hogy néhány konkrét esetben kiszámolják az események valószínűségét. Például annak a valószínűsége, hogy két Δ tulajdonságú foton egyike sem halad át egy 45° -os polarizátorlemezen $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Ugyanígy $1/4$ valószínűséggel mind a két foton áthalad, és $1/2$ eséllyel halad át 1 foton. Így lényegében megadtuk a fotonok áthaladásának valószínűségi eloszlását.

Következő tanítási kísérletemen néhány „bonyolultabb” esetet is szeretnék megtanítani, például 4 foton polarizátorlemezen történő áthaladásának valószínűségi eloszlását (22. ábra). Ez a középszintű matematika érettségi elvárásait nem meghaladja meg. Legyen az egyes

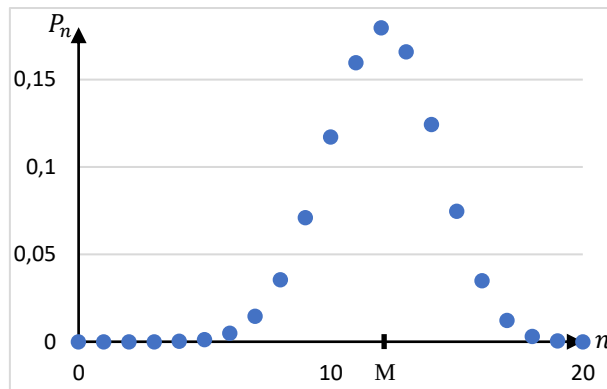
fotonok áthaladásának valószínűsége $p = 0,6$. Ha a 4 foton közül egy sem halad át, annak valószínűsége $(1 - p)^4 = (1 - 0,6)^4 = 0,0256$. Ha 1 foton halad át, akkor az négyféleképpen történhet meg. Így ennek az eseménynek a valószínűsége: $4p(1 - p)^3 = 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,1536$. Ugyanígy 2 foton áthaladása 6 féleképpen fordulhat elő (ezeket az eseteket könnyen felsorolhatjuk), ezért ennek az eseménynek a valószínűsége $6p^2(1 - p)^2 = 6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,3456$. Három foton áthaladását másképpen úgy is fogalmazhatjuk: pontosan egy foton nem haladt át. Mivel ennek az elnyelődő fotonnak a kiválasztása 4 féleképpen lehetséges, az esemény valószínűsége $4p^3(1 - p) = 4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,3456$. Legvégül mind a 4 foton áthaladásának valószínűsége $p^4 = 0,6^4 = 0,1296$.

Nagyobb fotonszám esetén a matematikai tárgyalás [18] nehezebbé válik a binomiális eloszlás alkalmazása miatt. Azonban kevés fotonszámú egyszerű esetekben hasznosnak gondolom ezeket a számolásokat. Az iménti gondolatot azért is tartom előnyösnek, mert, ha az eloszlás függvényt felrajzoljuk, akkor egy olyan görbét kapunk, melynek maximuma éppen a klasszikus Malus-jóslat környékére esik.

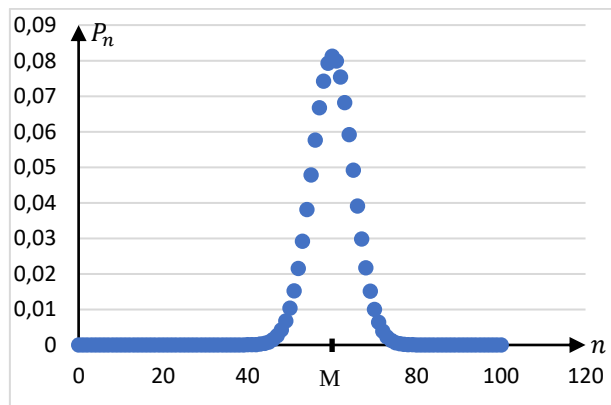


22. ábra: $N = 4$ foton érkezik egy polarizátorlemezre. Legyen egyetlen foton áthaladásának valószínűsége $p = 0,6$. A grafikon annak a P_n eloszlásfüggvényét mutatja, hogy összesen n foton halad át, ha azok egymástól függetlenek. A klasszikus Malus-törvény a várható értéket, azaz $N \cdot p = 4 \cdot 0,6 = 2,4$ foton áthaladását jósolja (M betű). A grafikon pontjai fölött a kiszámolás módja is fel lett tüntetve.

Nagyobb számú foton esetén a görbének maximuma már élesen kirajzolódik, mely éppen a Malus-törvény klasszikus jóslatának helye (23. és 24. ábra). Így megmutathatjuk diákjainknak a korrespondencia-elvet, azaz azt, hogy a kvantummechanikai törvények határesetként tartalmazzák a klasszikus fizikai törvényeket.



23. ábra: Egy $N = 20$ fotonból álló nyálában n foton áthaladásának eloszlásfüggvénye. Minden egyes foton áthaladásának valószínűsége $p = 0,6$. Ekkor a várható érték $N \cdot p = 20 \cdot 0,6 = 12$, azaz a Malus-törvény 12 foton áthaladását jósolja. Jól látszódik, hogy a várható érték az eloszlásfüggvény maximumához közel esik.



24. ábra: A korábbi két ábra most $N = 100$ fotonra vizsgálva. Látható, hogy a fotonszámot növelve egyre élesebb „csúcsa” van a függvénynek, egyre jobban közelíti a klasszikus Malus-törvény jósolatát ($N \cdot p = 100 \cdot 0,6 = 60$).

Végző észrevételem a határozatlansági relációval kapcsolatos. A fotonok polarizátorlemezekén történő áthaladása tekinthető mérésnek, mely során a fotonok polarizációs állapotát vizsgáljuk. A méréshez azonban lehet szórást rendelni, mert a jelenség valószínűségi természetű. A foton áthaladását jelölje a „+1” mért érték, az át-nem-haladását pedig a „-1” érték. Természetesen, ha a foton 0%-os eséllyel halad át, akkor jósolatunk tökéletesen bizonyos, a beeső fénynyaláb polarizációját teljes mértékben ismerjük. Ugyanez a helyzet a 100%-os valószínűségű áthaladás esetén is. Ezekben az esetekben a szórás 0, mert a fotonok mindig ugyanazt a mért értéket adják.

Tekintsük most azt a példát, amikor egy foton 50%-os valószínűséggel halad át a polarizátorlemezen. Ilyenkor a méréshez rendelt szórás a bizonytalanság mértékét jellemzi. Az iménti példában a fotonok fele áthalad (+1 mért érték), másik fele pedig nem (-1 mért érték),

így átlagosan az $\frac{1+(-1)}{2} = 0$ mérési eredményt adják, azaz a mért értékek átlagosan 1-gyel térnek el ettől, így a mérés szórása 1. Könnyen meggondolható, hogy az imént hozott példában a legnagyobb a bizonytalanság (azaz a szórás is). Ha a foton áthaladásának valószínűsége nő (vagy csökken), akkor a mérés átlaga eltolódik a gyakrabban mért érték felé, így az átlagtól való átlagos eltérés, tehát a szórás is csökken. Ez azt jelenti, mérésünk kevésbé bizonytalan.

Tegyünk most a fénynyaláb útjába két polarizátorlemez. Ha az első polarizátorlemez irányát változtatom, akkor az a következő lemez mérési kimenetelét is befolyásolja, hiszen az első lemez határozza meg a másodikkra beeső fotonok polarizációját. Másképpen megfogalmazva: ha az első polarizátorlemez szórását változtatom, az a második polarizátorlemez szórására hatást gyakorol. Ez a határozatlansági reláció egy lényeges tulajdonságát mutatja meg: bizonyos esetekben két mérés szórása nem független egymástól.

Összegzésként azt mondhatom a tananyag átadása sikeres volt, pilot project ellenére. A 2019/2020 tanév elején ezt sokkal nagyobb létszámmal, több időt rászánva tervezem megtanítani. A mostani kísérlet 13 db 45 perces tanórába telt (plusz pre- és posztteszt). A jövőben mindenképpen nagyobb figyelmet szeretnék fordítani az *A. hipotézis* izgalmaira, továbbá a fotonok polarizátorlemezen történő áthaladásának binomiális eloszlását is beépítem elemi szinten.

Terveim szerint a 2019/2020 tanév második felében a csoport olyan diákokat is fog tartalmazni, akik tizenegyedikesek és nem fizika fakultációra járnak. További érdekes kérdéskör lehet, hogy a hullámfüggvényt hogyan lehetne átvezetni a tananyagból, mely a kémia számára jelentene fontos háttértudást. Jövőbeli terveim előtt azonban részletes konzultációt fogok folytatni Marisa Michelinivel, mert tapasztalataim azt mutatják, a tananyagban még több lehetőség is rejlik, mint amelyet dolgozatomban bemutat.

A 2020-ban bekövetkező járványügyi helyzet miatt a tanítást online formában kellett folytatnom. Ezzel a céllal készítettem egy honlapot, ahol az összes tanóra megtalálható [19]. A webes felületet lehetőséget adott arra is, hogy oktatási tevékenységem országos szinten kiterjesszem, így elkezdtem foglalkozni nem csak az én osztályomba (és iskolámba) járó diákokkal. Annak érdekében, hogy biztosítsam a diákok önálló tanulását, minden órához részletes kísérletező és magyarázó videókkal is készültem. Elérhetőségem megadásával pedig azt biztosítottam, hogy a diákok problémáikat jelezzék, így a munkájukban segíteni tudok, továbbá a honlapot is finomíthatom.

Nagy örömömre a honlapom immár több internetes platformon keresztül is elérhetővé vált [20] [21].

7. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tél Tamásnak, aki évtizedes kutatói tapasztalataival támogatta munkám. Hálás vagyok Vincze Miklósnak a fordítás egyértelműsítésében nyújtott segítségéért, továbbá diákjaimnak, akik a szakkörön való részvétellel támogatták a kutatás megvalósulását.

8. Irodalomjegyzék

- [1] Tóth Kristóf, *Határozottság a határozatlanságban. Miért tanuljunk kvantummechanikát fizikatanárszakos hallgatóként?* TDK dolgozat, 2019.
- [2] http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html (Utolsó letöltés: 2019.11.30.)
- [3] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Calderon Press, 1958.
- [4] Tóth Eszter, *Fizika IV*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [5] Tóth Eszter, *Fizika IV. Munkafüzet*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [6] Tóth Eszter, Holics László, Marx György, *Atomközelen*. Gondolat Kiadó, 1981.
- [7] A. Loria, C. Malagodi, M. Michelini, *School Quantum Physics, in Structure of matter in the School*. Budapest, 1979.
- [8] G. Ghirardi, R. Grassi, M. Michelini, *A Fundamental Concept in Quantum Theory: The Superposition Principle, in Thinking Physics for Teaching*. Aster, Plenum Publishing Corporation, p.329, 1995.
- [9] Budó Ágoston, Mátrai Tibor, *Kísérleti Fizika III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [10] http://www.fisica.uniud.it/URDF/secif/mec_q/java_en3/jqm.htm (Utolsó letöltés: 2019.11.30.)
- [11] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István, *Sokszínű Matematika 11*. Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.
- [12] Hraskó Péter, *Elméleti fizika III. Kvantummechanika*, Pécs, 1998.
- [13] A. P. French, E. F. Taylor, *An introduction to Quantum Physics*. M.I.T. Introductory physics series, 1978.
- [14] Florin Constantinescu, Eugen Magyari, *Kvantummechanika Feladatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [15] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands – *Mai fizika. Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1970.
- [16] Marx György, *Kvantummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- [17] Alberto Stefanel, Marisa Michelini, *Learning paths of high school students in quantum mechanics*. Frontiers of Physics Education, Jurdana-Sepic et al eds., selected papers in Girep-Epec book, Zlatni, Rijeka (CRO) [ISBN 978-953-55066-1-4], pp.337-343 2008.
- [18] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István, *Sokszínű Matematika 12*. Valószínűességszámítás, statisztika című fejezet, Mozaik Kiadó, Szeged, 2008.

- [19] <https://kvantummechanikus.wordpress.com/>
- [20] <http://elft.hu/szabadon-elarheto-online-anyagok-a-kozepiskolai-fizika-tavoktatasahoz/>
- [21] <http://fiztan.phd.elte.hu/kozkins/elearning/index.html>

9. A. Függelék. Az oktatási anyag feladatlapjai

1. A fény polarizációjának vizsgálata írásvetítővel

A. Kísérletezés: Polarizált fény létrehozása

Végrehajtandó folyamatok. Az írásvetítőn...	Megfigyelések. Az áthaladó fény intenzitása...	Gondolatok Az áthaladó fény hányadára vonatkozóan:
A1. ... helyezzen el egy polarizátor lemezt (röviden polarizátort)	...adott részére csökken a polarizátor hatására	A fénynek csak egy része jut át a polarizátoron.
A2. ... forgassa el a polarizátort		A fény ugyanakkora hányada jut át, mint az előbb.
A3. ... helyezzen el két egyforma polarizátort ugyanolyan irányításban.		
A4. ...fordítsa a két polarizátort együtt, az írásvetítőhöz képest		
A5. ... forgassa az egyik polarizátort a másikhoz képest		

B. A fény polarizációjának értelmezése

Ha csak egy polarizátort alkalmaztunk, az áthaladó fény intenzitása lecsökkent az írásvetítőből kijövő fényéhez képest. Azonban ez a polarizátor forgatásával nem változik. Ha egy másik polarizátort helyezünk az elsőre, akkor az áthaladó fény intenzitása a bezárt szögüktől függ. Akkor minimális az áthaladó fény intenzitása, ha a két polarizátor egymásra merőleges.

B1. Az írásvetítőből kibocsátott fény és a polarizátoron áthaladó fény azonos tulajdonságú?
Válaszát részletezze!

C. A polarizátorok iránya és a fény polarizációja

Habár a szemünk elég jó fényintenzitásmérő, a fény polarizáltságát nem képes érzékelni. Ezért kénytelenek vagyunk polarizátort használni arra, hogy meghatározzuk a fény polarizációját.

C1. Hogyan lehetne azt eldönteni, hogy a fény polarizációja a fény olyan tulajdonsága-e, amely különbözik a fény intenzitásától?

C2. A fény mindig ugyanolyan módon polarizálódik egy polarizátoron áthaladva? Mi határozza meg a kijövő fény polarizációját?

C2.1. Válasz magyarázattal:

C2.2. Kísérlet:

Két polarizátort egymásra téve helyezünk el egy írásvetítőn úgy, hogy az egyik el van forgatva θ szöggel ahhoz képest, mint amikor maximális az áthaladó fény intenzitása.

C2.3. Egy harmadik polarizátorral megnézzük a második polarizátoron áthaladó fény polarizációját. Mi határozza ezt meg?

- ☐ Csak az első polarizátor helyzete.
- ☐ Csak a második polarizátor helyzete.
- ☐ Az írásvetítőre lerakott két polarizátor egymáshoz viszonyított helyzete.

C2.4. Az eredményre kísérleti bizonyíték és magyarázat:

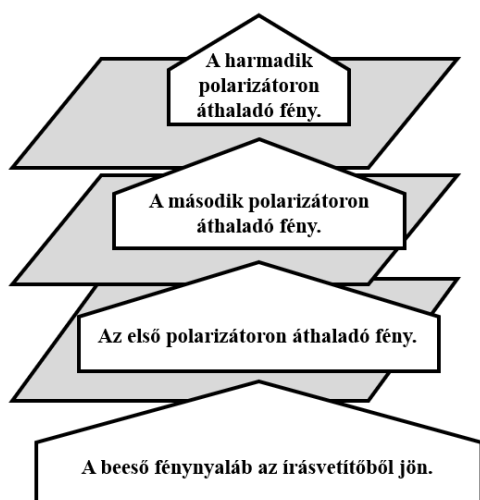
C2.5. A második polarizátoron áthaladó fény intenzitása:

- ☐ Csak az első polarizátor helyzetétől függ.
- ☐ Csak a második polarizátor helyzetétől függ.
- ☐ A két polarizátor egymáshoz viszonyított helyzetétől függ.

Megjegyzések:

D. A polarizáció, mint a fény állapotát jellemző tulajdonság.

A polarizátoron áthaladó fény polarizációját a polarizátor egymáshoz viszonyított helyzete határozza meg. Ha a polarizáció a fénynek egy olyan tulajdonsága, amelyet a polarizátor hoz létre, akkor hogyan dönthetnénk el, hogy ha sok polarizátoron megy át a fény, mindig ugyanolyan tulajdonságú lesz-e?



A kísérlet felépítése:

Egy polarizátort helyezünk egy fényforrás elé. Ezután két polarizátort helyezünk el egymásután úgy, hogy maximális fényintenzitás haladjon át rajtuk (azaz egyirányúak). Egy harmadik polarizátorral elemezhetjük az egyes polarizátorokon átjutó fény polarizációját.

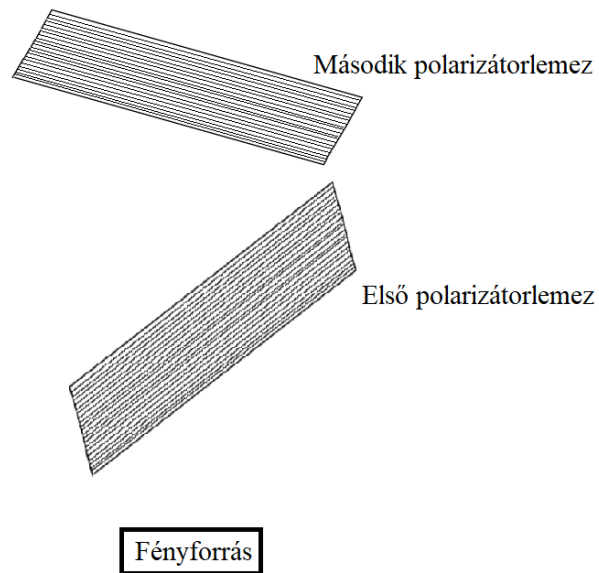
D1. Hogyan kell elhelyezni a kezünkben lévő polarizátort a többihez képest, hogy az áthaladó fény intenzitása maximális legyen a különböző esetekben?	Megfigyeljük a fény áthaladást az:	A nálunk lévő polarizátor irányítása annak érdekében, hogy az áthaladó fény intenzitása maximális legyen.
	Első polarizátoron	
	Második polarizátoron	
	Harmadik polarizátoron	

D2. A kapott eredmények alapján, van-e valami változás az áthaladó fény polarizációjában, amikor több polarizátort helyeztünk egymásra? Válaszát indokolja!

E. Elemzés

A több, egymással párhuzamos polarizátor nem változtatja meg az áthaladó fény polarizációját. Ezért a fény végig ugyanabban a polarizációs állapotban van.

E1. A fénynek a fényintenzitásán és polarizációs tulajdonságán felül terjedési iránya is van. Készítsen önmagától egy olyan jelölést, mellyel egyszerre képes szemléltetni ezt a három különböző információt. (feltesszük, hogy a két polarizátor nem merőleges).



F. A polarizátor szerepe a fénnel való kölcsönhatásban

Amikor egymásra helyezünk különböző szűrőket, az áthaladó fény intenzitása lecsökken, annál jobban, minél több szűrőt használunk. Ugyanez történik a polarizátorok esetén is?

Kísérlet: Két polarizátort helyezünk el egy írásvetítőn, egyik a másikon úgy, hogy az áthaladó fény intenzitása minimális legyen, ahogyan a jobb oldali látható kép is mutatja. A harmadik polarizátort tegyük ezekre rá, illetve tegyük be ezek közé!



F1. Mit várunk az áthaladó fény intenzitásáról?

F1.1. A harmadik polarizátort ráhelyezzük a másik kettőre, változtatva a velük bezárt szöget.	Az áthaladó fény intenzitása
F1.2. A harmadik polarizátort behelyezzük a másik kettő közé, változtatva a velük bezárt szöget.	Az áthaladó fény intenzitása

F2. Kísérletek

Az írásvetítőn elvégzett műveletek	A fényintenzitással kapcsolatos megfigyelések és eredmények. Az áthaladó fény intenzitása.....	Összehasonlítás a várakozással Hasonlóságok / különbségek	Következtetések
F2.1. Helyezze a harmadik polarizátort a két egymásra merőleges polarizátorra, majd forgassa azt!			
F2.2. Helyezzen a két egymásra merőleges polarizátor közé egy harmadikat, majd forgassa azt!			

F3. A fényszűrő egy sűrű közeg, amely csökkenti az áthaladó fény intenzitását. Tapasztalatai alapján működik-e a polarizátor szűrőként? Válaszát indokolja!

F4. Első értelmezés

F4.1. Tekintsük azt az esetet, amikor két egymásra merőleges polarizátor közé egy harmadikat helyezünk be úgy, hogy 45° -os szögben álljon hozzájuk képest. Ábrázolja a fényintenzitást és polarizációt az egyes polarizátorok mögött.

F4.2. Adja meg a kapott eredmények magyarázatát!

2. Malus kísérlete és az ideális eset

A. Egy I_0 intenzitású polarizált fénynyaláb egy polarizátorra esik, melynek áteresztőképességét a T együttható jellemzi. A kísérletek alapján azt mondhatjuk, hogy az áthaladó fény intenzitását az

$$I_T(\theta) = I_0 T \cos^2 \theta$$

összefüggés írja le.

A1. A jelenség melyik összetevőjét jellemzi a T (mi T fizikai jelentése)?

A T mennyiség értéke mindig: $\square > 1$ $\square < 1$ $\square = 1$.

Magyarázza meg a válaszát!

A2. A jelenség melyik összetevőjét írja le a $\cos^2 \theta$ szorzótényező?

A kísérleteket úgy értelmezzük, hogy elfogadjuk azt, hogy a fény fotonokból áll, melyek oszthatatlan, diszkrét egységek (azaz a fotonok száma mindig egész szám). A fény intenzitása pedig arányos a fotonok számával.

B. Ideális polarizátorok

B1. Egy N fotonból álló nyaláb áthalad az első polarizátoron, mely függőlegesen polarizálja a fényt (P1 polarizátor), majd egy P2 ideális polarizátoron (azaz $T = 1$), amely 45° -osan polarizál a P1 polarizátor irányához képest. A P2 polarizátor mögé egy detektort helyezünk el, amely megméri az áthaladó fotonok számát.

- Mekkora a P2-n áthaladó fotonok N_T száma? $N_T =$ _____

B2. Milyen irányú polarizációja lesz a fénynyalábnak, amikor az N_T/N hányados értéke...

- ...1? _____
- ...0? _____
- $\frac{1}{2}$? _____

B3. Most vizsgáljuk, mi történik akkor, ha a fénynyaláb annyira alacsony intenzitású, hogy egyszerre csak egy foton hat kölcsön a polarizátorral (és a detektorral). Meg kell ebben az esetben változtatnunk a B1 és B2 kérdésre adott válaszokat? Válaszát indokolja!

B4. Egy N fotonból álló F függőleges polarizációjú fénynyaláb áthalad egy ideális polarizátoron ($T = 1$), amelynek polarizációs iránya θ szöggel tér el az F -hez képest.

- Milyen információval szolgál a Malus-törvény $I_T/I_0 = N_T/N_0 = \cos^2 \theta$ a fotonok túléléséről?
-

B5. Mi annak a valószínűsége, hogy egy fotonnyaláb, amely 45° -osan van polarizálva, át fog haladni egy ideális polarizátoron ($T = 1$), a következő irányú polarizátorok esetén:

Függőleges? _____ Vízszintes? _____ 45° -os? _____

2.2. Valódi polarizátorok

A. Egy adott irányban polarizált fénysugár (pl F irányú), amely N fotonból áll találkozik egy valódi polarizátorral, amelynek áteresztőképessége: $T = 0,7$.

- Mi annak a valószínűsége, hogy egy foton áthalad a polarizátoron,
 - ha a polarizátor iránya F ? _____
 - ha a polarizátor iránya V (vízszintes)? _____
 - ha a polarizátor iránya 45° -os a F -hez képest? _____

B. Valódi polarizátorok esetén ($T = 0,7$) lehetséges, hogy az áthaladás valószínűsége

- Egyenlő 1-gyel? ☐ Igen ☐ Nem

Indokolja: _____

- Egyenlő 0-val? ☐ Igen ☐ Nem

Indokolja: _____

C. A valódi polarizátorok esetén ($T = 0,7$):

- Mi egy foton áthaladásának maximális valószínűsége? _____
- Mikor történik ez meg? _____

D. Milyen információt nyújt a túlélésről a $I_T/I_0 = N_T/N_0$ együttható ebben az esetben?

3. Foton-polarizátor kölcsönhatás és valószínűségi értelmezés

A. Egy N fotonból álló fénysugár áthalad a P1 polarizátoron, majd tovább halad a P2 polarizátorra. A két polarizátor egymással párhuzamos síkú, azonban a P2 el van forgatva θ szöggel ahhoz képest, mint amikor maximális az áthaladó fény intenzitása.

Mi annak a $p(\theta)$ -nak a valószínűsége, hogy egy foton áthalad a P2-n?

$$p(\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

B. Egy I_0 fényintenzitású polarizált fotonnyaláb áthalad a P1, majd a P2 polarizátoron. Mekkora a kilépő fény intenzitása, illetve a fotonok áthaladásának valószínűsége az egyes esetekben?

(F: függőleges V: vízszintes)

Eset	A beérkező fény polarizációja	A polarizátorok iránya		Az áthaladó fény intenzitása // Az áthaladás p valószínűsége					
		P1	P2	P1-ből		P2-ből		A két polarizátorból	
				I_{P1}	p_{P1}	I_{P2}	p_{P2}	I	p
B1	F	F	F	I_0	1	I_0	1	I_0	1
B2	F	F	V	I_0	1	0	0	0	0
B3	F	45°	F			$I_0/4$	$1/2$	$I_0/4$	$1/4$
B4	F	45°	V						
B5	V	45°	V						
B6	V	45°	F						
B7	45°	V	F						
B8	45°	V	45°						
B9	45°	F	45°						

C. Egy I_0 intenzitású polarizált fénysugár áthalad a P1, P2 és P3 polarizátorokon. Mekkora a kilépő fény intenzitása, illetve a fotonok áthaladásának valószínűsége az egyes esetekben?

Eset	A beérkező fény polarizációja	A polarizátorok iránya			Az áthaladó fény intenzitása // Az áthaladás p valószínűsége							
		P1	P2	P3	P1-ből		P2-ből		P3-ből		A három polarizátorból	
					I_{P1}	p_{P1}	I_{P2}	p_{P2}	I_{P3}	p_{P3}	I	p
C1	F	F	F	F								
C2	F	F	V	F								
C3	F	45°	F	V								
C4	F	45°	V	45°								
C5	V	45°	V	F								
C6	V	45°	F	F								
C7	45°	V	F	45°								
C8	45°	V	45°	V								
C9	45°	F	45°	V								

4. Hipotézisek megfogalmazása

A. Hogyan viselkednek a 45° -osan polarizált fotonok?

Tekintsük azokat a fotonokat, amelyek egy 45° -os irányítású polarizátoron haladnak keresztül, tehát a $\diamond$ ikon által jelzett polarizációs tulajdonsággal rendelkeznek.

A1. Egy elképzelt kísérlet eredményei. Fejezze be az alábbi rajzot a szimbólumok használatával: rajzolja be az ábrába az áthaladó fotonokat (számuk és polarizációs tulajdonságuk megadásával, az elsőt megadtuk).

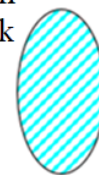
A beeső fotonok
függőlegesen
polarizáltak



A polarizátor
 45° -os irányú

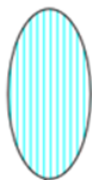


A beeső fotonok
vízszintesen
polarizáltak



A polarizátor
 45° -os irányú

A beeső fotonok 45° -osan
polarizáltak



A polarizátor
függőleges irányú

A beeső fotonok 45° -osan
polarizáltak



A polarizátor
vízszintes irányú

A2. A „kísérleti” eredmények összegzése.

Válassza ki a helyes megoldásokat az utolsó 2 oszlopban.

Eset	Fotonok tulajdonsága	A polarizátor polarizációs iránya	Az áthaladás valószínűsége	Áthalad-e egy egyedüli foton?			A foton áthaladás utáni tulajdonsága:		
				Soha	Mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*
1	$\diamond$	45°		Soha	Mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*
2	$\diamond$	F		Soha	Mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*
3	$\diamond$	V		Soha	Mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*
4	Δ	45°		Soha	Mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*
5	*	45°		soha	mindig	Az esetek felében	$\diamond$	Δ	*

B. Hipotézisek a „kísérleti” eredmények alapján. Hogyan jellemezhetünk egy 45° -osan polarizált fotonnyalábot (vagy más szóval, amelyek $\diamond$ tulajdonságúak)?

B1. A következő hipotézisek közül melyik írja le a legjobban a fotonnyalábot, amely $\diamond$ tulajdonságú?

- A $\diamond$ tulajdonságú fotonnyaláb egyenértékű egy olyan fotonnyalábbal, amelynek egyik fele *, másik fele pedig Δ tulajdonságú.
- A $\diamond$ tulajdonságú fotonnyaláb egyenértékű egy olyan fotonnyalábbal, amelynek fotonjai egyszerre rendelkeznek a * és Δ tulajdonságokkal.
- A $\diamond$ tulajdonságú fotonnyalábot kizárólag $\diamond$ fotonok alkotják, melyek teljesen különbözőek a * és Δ tulajdonságúaktól.
- Egyéb (fejtse ki): _____

B2. Milyen szerepet játszik az ideális polarizátor a fénnel való kölcsönhatásban?

A polarizátor amikor kölcsön hat a fénnel:

- csak passzív szűrőként működik, azaz kizárólag elnyel fotonokat.
- csak aktív szűrőként működik (azaz megváltoztatta a fény tulajdonságát).
- mind aktív, mind passzív szűrőként működik (megváltoztatja a fény tulajdonságát és egy részét el is nyeli).

Megjegyzések

5. Egymást kizáró tulajdonságok

A. Egy N fotonból álló sugár áthalad a $P1$ polarizátoron és eltalálja a második $P2$ polarizátort, amely síkja párhuzamos az elsővel, de el van forgatva a sugár irány, mint tengely körül θ szöggel a maximális fényintenzitás irányához képest.

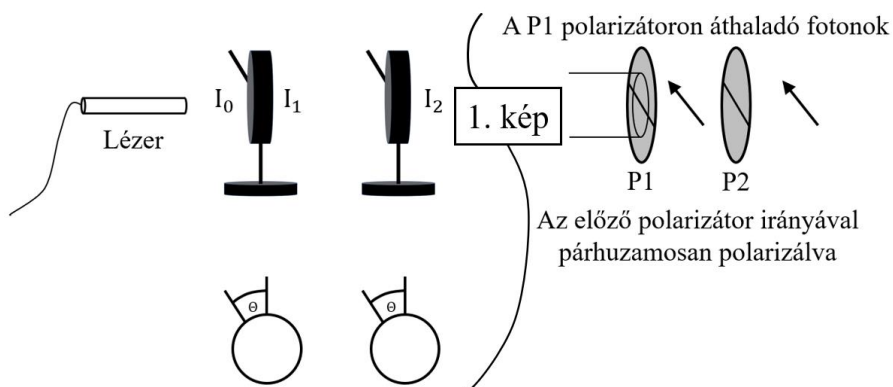
A1. Válasszon a különböző lehetőségek közül a következő esetekben!

Eset	Lehetőségek	
A1.1. A foton biztosan áthalad a $P2$ -n (azaz az áthaladás valószínűsége 1), ha a két polarizátor $P1$ és $P2$ bezárt szöge:	a	$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$
	b	$\theta = 0^\circ$ (párhuzamos)
	c	$\theta = 90^\circ$ (merőleges)
A1.2. A foton biztosan elnyelődik a $P2$ -ben (az áthaladás valószínűsége 0), ha a két polarizátor $P1$ és $P2$ szöge:	a	$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$
	b	$\theta = 0^\circ$ (párhuzamos)
	c	$\theta = 90^\circ$ (merőleges)

B. Az A1.1. feladat biztos jóslata lehetővé teszi, hogy feltevésekkel éljünk a fotonra:

- a $P1$ -en való áthaladás után szert tesz egy tulajdonságra, melyet megtart még a $P2$ -n történő áthaladás után is

A polarizátoron áthaladó fotonok polarizálódnak. A foton polarizációját egy egységvektor jellemzi, amelyet a foton polarizációs vektorának nevezünk, a polarizátorhoz képest rögzített irányba párhuzamosan (lásd a lenti ábrát). Az egyszerűség kedvéért ezt az irányt a polarizátor irányának hívjuk. Tudjuk, hogy két különböző polarizátor esetén akkor maximális a fényáteresztés, ha ezek az irányok párhuzamosak.



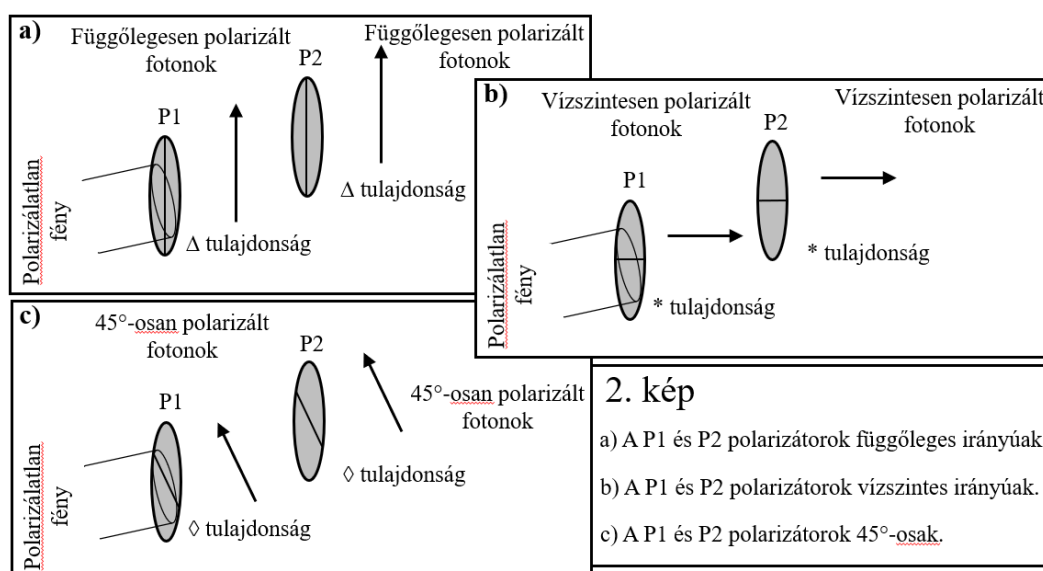
C. A helyzetet a polarizáció tulajdonságainak ábrázolásával szemléltethetjük, három esetet vizsgálva: függőleges, vízszintes és 45° -os irányú polarizációt (lenti ábra).

Ezeket a szimbólumokat használjuk:

Δ a polarizátoron áthaladó fotonok tulajdonsága függőlegesen választott irány (F) esetén

* a polarizátoron áthaladó fotonok tulajdonsága vízszintesen választott irány (V) esetén

$\diamond$ a polarizátoron áthaladó fotonok tulajdonsága 45°-osan választott irány (45°) esetén



D. Tekintsünk egy fotonnyalábot, amely egy rögzített irányban polarizált (azaz jól definiált tulajdonsággal rendelkezik), amely irányt egy polarizátor adott meg.

D1. Egészítse ki az utolsó oszlopokat a táblázatban a várható eredmények alapján.

Eset	Beérkező foton tulajdonsága	Polarizátor	Áthaladás valószínűsége	Eredmény: a foton áthalad (S: soha, M: mindig)
1	*	V		
2	*	F		
3	Δ	V		
4	Δ	F		

D2. Az alábbi táblázatokból válassza ki a helyeseket:

Egy foton nem lehet egyszerre * és Δ tulajdonságú.

Egy foton rendelkezhet egyszerre a * és Δ tulajdonságokkal.

A Δ és * tulajdonságok egymást nem zárják ki.

A Δ és * tulajdonságok egymást kizárják.

6. Értelmezési hipotézisek. Kizáró és nem-kizáró tulajdonságok.

Ahhoz, hogy leírjuk a 45° -osan polarizált fotonnyalábot (azaz a $\diamond$ tulajdonságút), a következő hipotézist tesszük fel.

A. HIPOTÉZIS: A statisztikus keveredés (klasszikus szemléletünk szellemében).

Egy $\diamond$ tulajdonságú fotonnyaláb ekvivalens azzal, hogy a fotonok egyik fele Δ tulajdonságú, másik fele pedig $*$ tulajdonságú.

Azaz szimbólumokkal leírva: $\diamond\diamond\diamond = \Delta\Delta + **$.

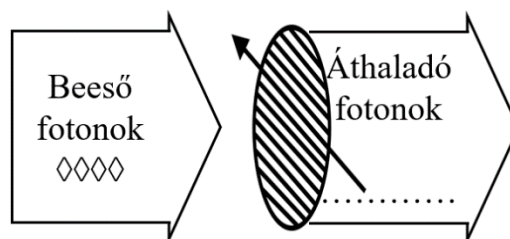
A1. Vizsgáljuk mik ennek a következményei. Az A. hipotézis fenntarthatóságát úgy döntjük el, hogy összehasonlítjuk a fotonnyaláb áthaladását egy 45° -os polarizátoron két esetben:

- a fotonok mind 45° -osan polarizáltak a $\diamond$ tulajdonsággal,
- a fotonok fele függőleges polarizációjú, azaz Δ tulajdonságú, másik fele pedig vízszintes, azaz $*$ tulajdonságú.

Elemezzük a két esetet.

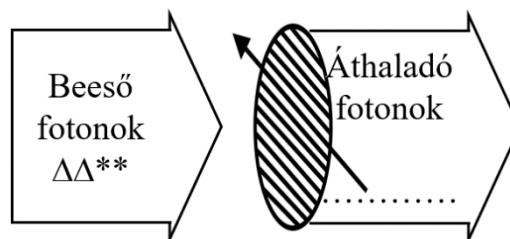
A1.1. Egy 45° -osan polarizált N fotonból álló nyaláb (azaz a fotonok $\diamond$ tulajdonságúak. Ez előállítható úgy, hogy átengedünk egy fotonnyalábot egy 45° -os polarizátoron) áthalad egy ideális polarizátoron, amely iránya 45° .

- Az áthaladó fotonok száma: _____
- Az áthaladó fotonok polarizációja: _____
- Egészítse ki a jobb oldali rajzot a „kísérleti” adatokkal összhangban levő és számú szimbólum felhasználásával.



A1.2. Egy N fotonból álló nyaláb álljon átlagosan $N/2$ Δ tulajdonságú fotonból és $N/2$ $*$ tulajdonságú fotonból, amely ráesik egy 45° -os polarizátorra.

- Az áthaladó fotonok száma: _____
- Az áthaladó fotonok polarizációja: _____
- Egészítse ki a jobb oldali rajzot a kísérleti adatokkal összhangban levő és számú szimbólum felhasználásával.



B. A két eset elemzése alapján, milyen tanulságot vonhatunk le az *A. hipotézis*ről, amely a statisztikai keveredésről szól: $\diamond\diamond\diamond = \Delta\Delta + **$?

A 45° -osan polarizált fotonok állapota egyenértékű lenne egy függőleges és egy vízszintes polarizációjú foton 50-50%-os keverékével?

C. Ellentmondást találtunk abban a hipotézisben, amely szerint a $\diamond$ tulajdonságot a Δ és $*$ tulajdonságok statisztikus keveredéseként értelmeztük. Milyen következtetést vonhatunk le a kísérleti eredményekből, amelyek a $\diamond$ és $*$ illetve a $\diamond$ és Δ tulajdonságokra vonatkoznak? Karikázza be a válaszát!

A Δ és $\diamond$ (vagy $*$ és $\diamond$) tulajdonságok egymást kizárják.	A Δ és $\diamond$ tulajdonságok nem-kizárók.
A foton egyszerre Δ és $*$ tulajdonságú.	A Δ és $\diamond$ tulajdonságok egymást kizárják.
	A foton nem lehet egyszerre Δ és $*$ tulajdonságú. Ezek nem-kizárók.

Indokolja fenti választásait az eddigi megfontolások alapján:

D. A Δ és $*$ tulajdonságok egymást kizárják. Általában hozzárendelhetjük az egyes fotonokhoz a megfelelő polarizációs tulajdonságot: például a $\diamond$ tulajdonságra a fotonok 45° -osan polarizáltak.

Magyarázza el mit ért azon, hogy egymást kizáró és nem-kizáró tulajdonságok.

Egymást kizáró tulajdonságok:

Nem-kizáró tulajdonságok:

7. Kvantumbizonytalanság

Ha az A . hipotézis következményeit összehasonlítjuk a kísérleti eredményekkel, a kvantumrendszerek sajátos tulajdonságára derül fény.

A. Bizonytalansági elv

Válaszoljunk a következő kérdésekre, amelyek arra a helyzetre vonatkoznak, amikor egy polarizált fotonnyaláb egy vele azonos irányú polarizátoron halad át.

A1. Egy foton átjutott egy függőleges polarizátoron, ezért Δ tulajdonságú. Mondhatjuk-e azt, hogy rendelkezik a $\diamond$ tulajdonsággal, és milyen méréssel dönthetjük el, hogy így van-e? Indokolja!

A2. Egy foton 45° -osan polarizált, ezért $\diamond$ tulajdonságú. Mondhatjuk-e azt, hogy rendelkezik a * vagy Δ tulajdonságokkal és milyen méréssel dönthetjük el, hogy így van-e? Indokolja!

A kvantumbizonytalanság elve abban a tényben nyilvánul meg, hogy egy fizikai rendszerrel nem lehet egyértelműen és egyidejűleg társítani azokat a tulajdonságokat, amelyek egymást nem-kizáró tulajdonságok méréséből következnenek.

A3. A fény polarizációja esetén mik az egymást nem-kizáró tulajdonságok?

A4. Hogyan lehetne lefordítani a bizonytalansági elvet fotonokra, amikor polarizátorral találkoznak?

B. Kvantumrendszerek és a kvantumbizonytalanság

Tekintsük azt az esetet, amikor egy polarizált fotonnyaláb találkozik egy polarizátorral, melynek az irányítása adott.

B1. A függőlegesen polarizált fotonnyaláb minden fotonja Δ tulajdonságú.

Meg lehet őket különböztetni? Igen Nem

Milyen módon? _____

Amikor ezek a fotonok találkoznak egy 45° -os polarizátorral, ugyanúgy viselkedik mindegyikük? Igen Nem

B2. A 45° -osan polarizált összes foton $\diamond$ tulajdonságú.

Amikor találkoznak egy függőleges polarizátorral, akkor ugyanúgy viselkedik az összes foton?

Igen Nem

B3. A bizonytalanság az egyes fotonok túlélésében mutatkozik meg.

Az egyes fotonok túlélésében megjelenő bizonytalanság a jelenség természetéből adódik?

Válaszát fejtsse ki!

Esetleg valamely tényező kihagyása miatt van így? _____

Mi lehet ez a tényező? _____

B4. Az azonos állapotban lévő kvantumfizikai rendszerek mind azonosak.

Hogyan lehetne kifejezni ezt a tényt a fény polarizációjával kapcsolatosan eddigi megfigyeléseink alapján?

B5. Az azonos állapotban előkészített fizikai rendszerek általában eltérő módon lépnek kölcsönhatásba ugyanazzal a fizikai rendszerrel, például (hozzájuk képest) nagy méretű mérőeszközzel.

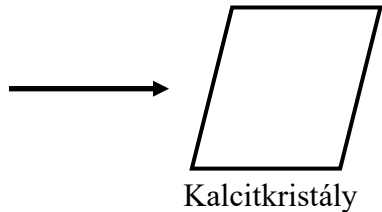
Hogyan fejezhetjük ki ezt a tényt eddigi megfigyeléseink alapján?

8. Kvantumrészecskék és pályák

Szeretnénk megvizsgálni a fotonok és az ideális kettőtörő kristályok kölcsönhatását (mivel ideális, ezért minden foton áthalad). Szeretnénk felderíteni, hogy rendelhető-e pálya a fotonhoz a fotonok polarizációja és a sugármenetek közötti összefüggés alapján.

I. A kettőtörő kristályok jelenségeinek megismerése és a valószínűségi értelmezés

A. Egy függőlegesen polarizált lézerfénynyaláb találkozik egy kettőtörő kalcitkristállyal, amely úgy van elhelyezve, hogy az ordinárius sugár 45° -osan polarizált.

A.1. Mit figyelünk meg?	
A1.1. Leírás szavakkal	A1.2. Egészítse ki a diagrammot  Kalcitkristály

A.2. Ha az ordinárius sugár 45° -osan polarizált, akkor mi a polarizációja az extraordinárius sugárnak? _____

A3. A kristály helyzete rögzített:

A3.1. Függ az ordinárius sugárnyaláb polarizációja és az extraordinárius sugárnyaláb polarizációja a beeső fény polarizációjától? ☐ Igen ☐ Nem

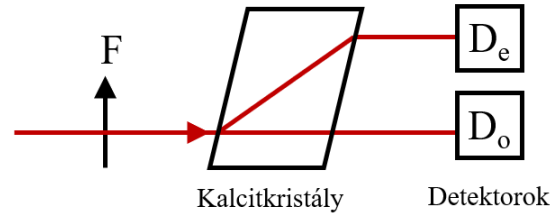
Magyarázza meg:

A3.2. Függ az ordinárius sugárnyaláb intenzitása és az extraordinárius sugárnyaláb intenzitása a beeső fény polarizációjától? ☐ Igen ☐ Nem

Magyarázza meg:

A4. Ha a beeső fény polarizációjának iránya $\theta = 45^\circ$ -os szöget zár be az extraordinárius sugárnyalábbal, akkor: $I_{ext}/I_{ord} =$ _____

B. Egy N fotonból álló függőlegesen polarizált fénynyaláb találkozik egy ideális kettőtörő kalcitkristállyal. A sugárnyaláb kilépésének megfelelően két detektort helyezünk el, az ordinárius és az extraordinárius sugárnyaláb irányába.



B1. Minden egyes beérkező fotonra:

- ☐ Az egyik detektor fogja jelezni, hogy talált egy fotont.
- ☐ Mindkét detektor fotont fog találni.
- ☐ Minden esetben csak a _____ jelű detektor fog fotont találni.

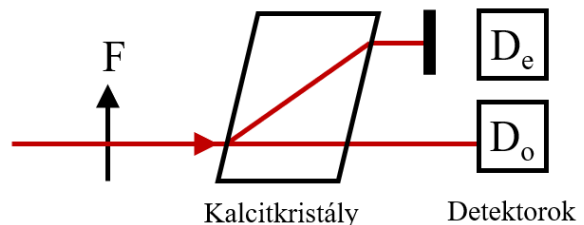
B2. Minden beérkező fotonra:

B2.1. Az a detektor, amely az ordinárius sugár irányába van elhelyezve _____% eséllyel talál fotont.

B2.2. Az a detektor, amely az extraordinárius sugár irányába van elhelyezve _____% eséllyel talál fotont.

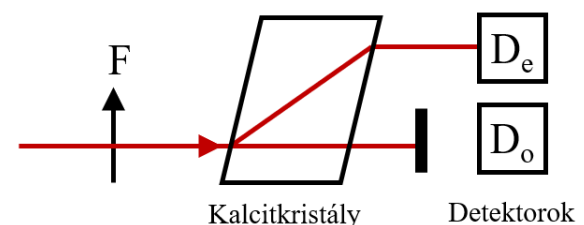
B3. Ha lefedjük a D_e detektort, akkor a D_o detektor felvillan (talál egy fotont):

- ☐ minden beérkező fotonra.
- ☐ átlagosan 50%-os eséllyel.
- ☐ alternatív módon, azaz egy fotonra igen, a következőre nem.
- ☐ sosem.



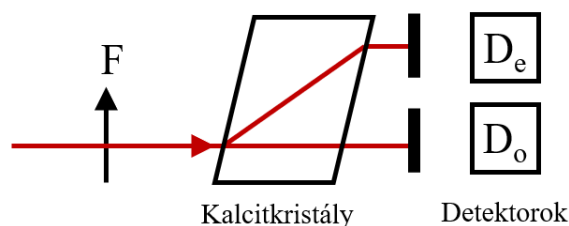
B4. Ha lefedjük a D_o detektort, akkor a D_e detektor felvillan (talál egy fotont):

- ☐ minden beérkező fotonra.
- ☐ átlagosan 50%-os eséllyel.
- ☐ alternatív módon, azaz egy fotonra igen, a következőre nem.
- ☐ sosem.



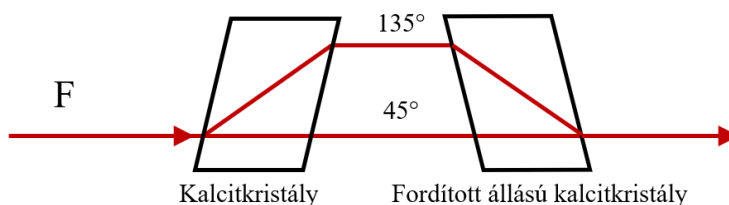
B5. Ha lefedjük mindkét detektort, akkor mindkettő felvillan:

- ☐ minden beérkező fotonra.
- ☐ átlagosan 50%-os eséllyel.
- ☐ alternatív módon, azaz egy fotonra igen, a következőre nem.
- ☐ sosem.



II. Polarizáció és áthaladó sugarak kalcitkristályban

A. Elhelyeztünk két kalcitkristályt egymás mögé úgy, hogy az egyik a másiknak fordítottja. Egy N fotont tartalmazó fotonnyaláb ráesik az első kristályra. A második kristályból kilépve látható, hogy egy nyalábbá egyesült az ordinárius és extraordiárius fénnyyaláb. Ha a beeső sugár függőlegesen polarizált, az ordinárius sugár 45° -osan, az extraordiárius sugár pedig 135° -osan.



A1. Milyen polarizációjú a második kristályból kilépő egyesített nyaláb? _____

A2. Milyen tulajdonságú fotonok lépnek ki a második kristályból? _____

B. Tudjuk, hogy az ordinárius sugár mindig 45° -osan polarizált (azaz a fotonok tulajdonsága $\diamond$) és az extraordiárius nyaláb pedig mindig 135° -osan polarizált (ezen fotonok tulajdonságát pedig jelöljük $\heartsuit$ -vel), azaz szoros összefüggés van a foton pályája és a polarizációja között.

Értelmes azt feltételeznünk, hogy egy foton követi valamelyik pályát a kettő közül?

Ez a kérdés a kettőtörő kristályokra ekvivalens az *A. hipotézissel*, amelyet korábban a foton-polarizátor kölcsönhatás kapcsán vizsgáltunk.

Lássuk milyen következményekkel jár a pálya fogalma.

Függőlegesen polarizált, N fotonból álló nyaláb (Δ tulajdonságú) találkozik egy két kristályból álló rendszerrel, ahol az egyik kristály fordítottja a másiknak. Gondolhatjuk azt, hogy a fotonok a két pálya egyike mentén haladnak (azaz az ordinárius vagy az extraordiárius sugár mentén)?

Ez ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy $\diamond\diamond\diamond = \Delta\Delta + **$,
 azaz egy kérdéssel, amelyre már válaszoltunk korábban, de most megvizsgáljuk a
 következményeit és azok esetleges kapcsolatát a fotonok pályájával.

C. Töltsük ki az alábbi ábrákat:

Négy függőleges polarizációjú (Δ) tulajdonságú foton. „Kísérlet”	Négy foton, melyek közül kettő 45°-osan polarizált $(\diamond)$ tulajdonság), a másik kettő pedig 135°-osan polarizált $(\heartsuit)$ tulajdonság). [Ez történne az A. hipotézis szellemében]
C1.1 $\Delta\Delta\Delta\Delta$	C1.2 $\diamond\diamond\heartsuit\heartsuit$
C2.1 $\Delta\Delta\Delta\Delta$	C2.2 $\diamond\diamond\heartsuit\heartsuit$
C3.1 $\Delta\Delta\Delta\Delta$	C3.2 $\diamond\diamond\heartsuit\heartsuit$
C4.1 $\Delta\Delta\Delta\Delta$	C4.2 $\diamond\diamond\heartsuit\heartsuit$

D. Hasonlítsuk össze a „kísérleti” helyzeteket és az A. hipotézisből adódó eredményeket:

D1. Feltehetjük azt, hogy a fotonok fele követi az ordinárius pályát, a másik fele pedig az
 extraordináriusát? Igen Nem

Indokolja!

D2. Mondhatjuk azt, hogy a fotonok követik mindkét pályát? Igen Nem

Indokolja!

D3. Fenntartható-e az a gondolat, miszerint a fotonok másik pályát követnek, mint az ordinárius vagy extraordinárius? Igen Nem

Indokolja!

D4. Tudunk a fotonokhoz pályát rendelni? Igen Nem

Indokolja!

9. A Malus-törvény statisztikai jelentése

A1. 10 vízszintesen (V) polarizált foton esik egy (ideális) polarizátorra. Várhatóan hány fotont fog észlelni a polarizátoron túl elhelyezkedő detektor? Vizsgáljuk a következő irányú polarizátorokat:

A1.1.

- Vízszintes (V) _____
- Függőleges (F) _____
- 45°-os: _____
- A vízszintessel 30°-ot bezáró: _____

A2. Most végezzük el JQM-rel a fenti kísérleteket (olyan lézert használunk, amely egyetlen foton kibocsátására is képes).

A2.1. Az egyes esetben hány fotont észlel a detektor? Adja meg a számokat

A2.2. Megerősítik ezek az A1.1 várakozást? _____

Magyarázza el, hogy milyen esetekben volt a várakozás helytálló!

A2.3. Milyen következtetéseket lehet levonni ezekből a kísérletekből? _____

A3. Egy 100 fotonból álló, 30°-osan polarizált nyaláb halad át egy vízszintesnek választott polarizációs irányú (ideális) polarizátoron. Hány foton fog eljutni polarizátoron túl elhelyezett detektorhoz? Milyen számértéket kap a JQM szimulációs kísérlettel?

A polarizátor választott iránya	Az áthaladó fotonok száma (jóslat)	Az áthaladó fotonok száma (kísérlet)
Vízszintes (V)		
Függőleges (F)		
30°-os a vízszinteshez képest		

A4. Az elvégzett szimulációs kísérletek eredményei alapján milyen statisztikai jelentést tulajdoníthatunk a Malus-törvénynek? _____

A5. Hasonlítsuk össze a 45° -os polarizációjú 100 fotonos sugár viselkedését egy 50 fotonból álló V polarizációjú és egy 50 fotonból álló F polarizációjú sugár viselkedésével, a polarizátoron való áthaladás szempontjából (pl. : V, H 45° -on).

A5.1. Magyarázza el, hogyan történik ez az összehasonlítás a JQM használata esetén!

A5.2. Milyen eredményeket adott a JQM? _____

A5.3. Milyen következtetések vonhatók le?

Kísérletek kalcitkristállyal a kvantumrendszerek pálya fogalma

B. Adja meg az egyes esetek fotonszámát és a polarizátoron túljutott fotonok polarizációját (megfelelő szimbólummal).

A fotonok száma $N = 100$, polarizációjuk 45°-os. B1.1 B2.1 B3.1 B4.1	A fotonok száma $N = 100$, azonban 50 foton F polarizációjú (Δ tulajdonság), a másik 50 pedig V polarizációjú ($*$ tulajdonság). B1.2 B2.2 B3.2 B4.2
---	---

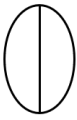
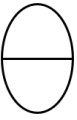
B5. A bal és a jobb oldalon látható eredmények összehasonlítása:

1. Feltehetjük-e, hogy a fotonok fele az ordinárius, másik fele az extraordinárius pályát követi? Igen Nem
2. Mondhatjuk-e, hogy a fotonok mindkét pályát követik? Igen Nem
3. Feltételezhető-e, hogy a fotonok az ordinárius vagy extraordinárius pályákon haladnak? Igen Nem
4. Vajon lehet az egyes fotonokhoz pálya fogalmat rendelni? Igen Nem

Válaszait indokolja!

C. Készítsen összefoglalót a vizsgált esetekről és az eldöntendő hipotézisekről. Mik az eredmények, és milyen következtetéseket tudunk levonni?

D. Egészítse ki a táblázatot. Az első oszlop az első polarizátor irányát mutatja, mely meghatározza a rajta áthaladó foton polarizációs irányát. A második oszlop a második polarizátor irányát adja meg. Erre N foton érkezik.

1. A beeső fénynyalábot polarizáljuk.	Majd ez a fénynyaláb ráesik egy polarizátorra.	A második lemezen történő áthaladás valószínűsége	Az áthaladó foton tulajdonsága
 F	 F		
	 V		
	 45°		
	 30°		
	 60°		
2. A beeső fénynyalábot polarizáljuk.	Majd ez a fénynyaláb ráesik egy polarizátorra.	A második lemezen történő áthaladás valószínűsége	Az áthaladó foton tulajdonsága
 V	 F		
	 V		
	 45°		
	 30°		
	 60°		
3. A beeső fénynyalábot polarizáljuk.	Majd ez a fénynyaláb ráesik egy polarizátorra.	A második lemezen történő áthaladás valószínűsége	Az áthaladó foton tulajdonsága
 45°	 F		
	 V		
	 45°		
	 30°		
	 60°		

D1.1. Vannak olyan esetek, ahol az események biztosak, azaz 0 vagy 1 valószínűségűek? Mik azok?

D1.2. Mennyire hasonlít a kilépő foton a belépőhöz?

D1.3. Hogyan lehetne leírni a folyamatokat foton polarizációs állapotok szerint?

D2.1. Vannak-e olyan esetek, amikor nem lehet egyértelműen megállapítani, hogy a foton áthalad-e? Mik azok?

E. Használja az elemzett tulajdonságokat a kölcsönös kizárás és nem-kizárás fogalmának gyakorlására, megjelölve, hogy két tulajdonság kölcsönösen kizárja-e egymást.

E.1. Kölcsönös kizárás

E2. Nem-kizárás:

10. A fogalmaktól az összefüggésekig

A szuperpozíció elve

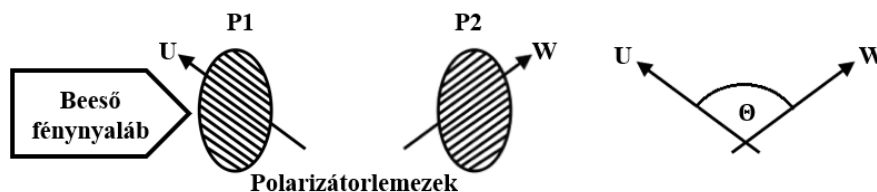
A polarizáció jelenségrenek egyszerűsége lehetővé teszi számunkra, hogy fokozatosan építsük fel a tárgyalt folyamatok matematikai leírását. A klasszikus szemlélettől a sok fotonból álló fényintenzitás mérésig fokozatosan építettük fel a foton polarizációs állapotának fogalmát, a kvantumos szuperpozíció elvét, és az állapotok közötti átmenetek valószínűségét.

Jegyezzük meg: Az (egység)vektorokat vastagbetűvel jelöljük, pl.: **F**.

Az állapotokat pedig normál betűtípussal, pl.: *f* jelöli a függőleges polarizációs állapotot.

1. Kvantumállapotok és vektorok

A. Elhelyezünk két polarizátort P1-et és P2-t egymás mögé, amelyek az **U** és **W** vektorok szerint vannak irányítva ($(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) = 1$ és $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}) = 1$)



A P1-re egy *N* fotonból álló fénynyaláb esik.

A1. Ha θ -val jelöljük az **U** és **W** által bezárt szöveget, akkor mi annak a valószínűsége, hogy egy P1-en áthaladó foton a P2-n is áthalad? _____

A2. A **W** és **U** vektorok skaláris szorzata $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) =$ _____

A3. Hogyan lehetne kifejezni a *p* valószínűséget a $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})$ skalárszorzattal? _____

A4. Rögzítjük a P2 által választott irányt (azaz a **W**-t).

Egy fotonnak a P2-n való áthaladásának valószínűségét:

- ☐ Teljes egészében meghatározza az **U**.
- ☐ Meghatározza az **U**, azonban lényeges egy másik tényező is (adja meg melyik az) _____
- ☐ Nem függ **U**-tól.

A foton állapota a P2-vel való találkozás előtt:

- ☐ Teljes egészében meghatározott, ha **U** is ismert.
- ☐ Meghatározott az **U** és egy másik tényező ismeretében (adja meg melyik az) _____
- ☐ Nem függ **U**-tól.

A5. Ha úgy rögzítjük P2-t, hogy irányát a $\mathbf{W}' \neq \mathbf{W}$ vektor adja meg, akkor az A4-es pontban adott válaszok közül melyiket kellene megváltoztatni? Válaszát indokolja!

A6. Milyen következtetést vonhatunk le egy foton statisztikus viselkedéséről, amikor áthalad a P2-n:

- ☐ Teljesen meghatározza $\mathbf{U}$ bármilyen $\mathbf{W}$ esetén.
- ☐ Meghatározza $\mathbf{U}$ és egy másik tényező (adja meg melyik) _____ minden $\mathbf{W}$ értékre
- ☐ Nem függ $\mathbf{U}$ -tól.

A7. A P1-en áthaladó foton állapotához hozzárendelhetünk egy vektort: $\mathbf{u}$. Elegendő ez a hozzárendelés a kísérleti eredmények leírására (Malus-törvény)? Válaszát indokolja!

A8. Adjuk meg minek feleltethető meg a P2-n áthaladó foton állapota!

- ☐ $\mathbf{u}$
- ☐ $\mathbf{w}$
- ☐ _____ alapján.

B. A p valószínűség meghatározza a foton két állapot közötti átmenet valószínűségét. Fogalmazza meg ezt a bevezetett jelölés segítségével.

Az a tény, hogy az $\mathbf{u}$ állapothoz hozzárendelhető egy $\mathbf{u}$ vektor, lehetővé teszi, hogy a matematika nyelvén is megfogalmazzuk a következményeket. Ezeket a szuperpozíció elve foglalja össze.

2. A szuperpozíció elve

A. Egy $\mathbf{u}$ egységvektorral jelölt polarizációjú foton találkozik egy:

- polarizátorral, amelynek irányát a $\mathbf{V}$ egységvektor határozza meg.
Mi annak a valószínűsége, hogy a foton áthalad? _____
- polarizátorral, amelynek irányát az $\mathbf{F}$ egységvektor határozza meg ($\mathbf{F} \perp \mathbf{V}$).
Mi annak a valószínűsége, hogy a foton áthalad? _____

B. Az $\mathbf{u}$ egységvektor felírható, mint az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{v}$ egységvektorok lineáris kombinációja:

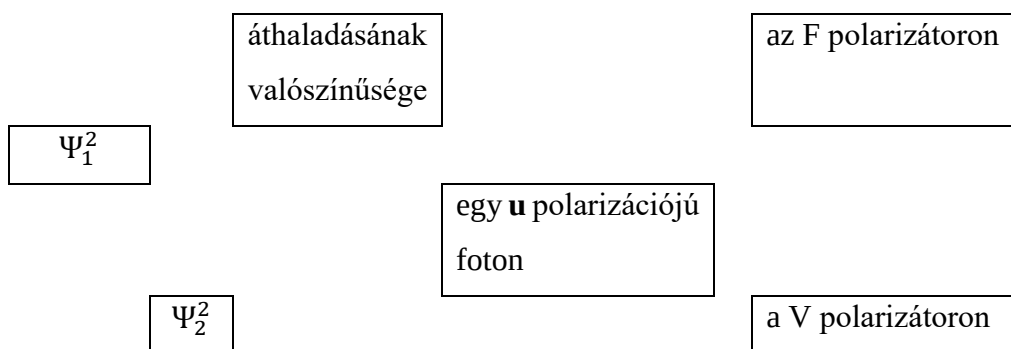
$$\mathbf{u} = \Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}$$

Fejezze be a következő kifejezéseket:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}) = \Psi_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot (\Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}) = \Psi_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

C. Az átmenet valószínűsége. Az előző eredményből levonhatjuk a következtetéseket, hogy...
(kösse össze nyilakkal a szövegdobozokat és a megfelelő igéket annak érdekében, hogy két értelmes mondatot kapjunk - különböztesse meg őket: az egyik esetben egy folytonos nyilat ($\rightarrow$), a másikban esetben pedig egy szaggatott nyilat ($\dashrightarrow$) használva).



Mivel $\mathbf{u}$ egységvektor, ezért $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 1$. Így a következőknek kell teljesülnie:

C1. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = (\Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}) \cdot (\Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}) = \underline{\hspace{2cm}} = 1$

C2. Hogyan értelmezné a következő összefüggést: $\Psi_1^2 + \Psi_2^2 = 1$?

C3. Mi annak a valószínűsége, hogy a kezdetben „u” állapotú foton, ha áthalad egy polarizátoron (azaz mérést hajtunk rajta végre), akkor utána a „v” vagy az „f” állapotban lesz?

C4. Meg lehet-e bizonyosodni arról, hogy a kezdetben u állapotú foton a polarizátoron való áthaladás után (azaz a mérés után) f (vagy v) állapotban lesz? Válaszát fejtse ki!

D. Biztosan jósolható esetek és a merőleges állapotok

D1. Annak a valószínűsége, hogy egy v állapotú foton áthalad egy V polarizátoron: _____.

D2. Annak a valószínűsége, hogy egy v állapotú foton áthalad egy F polarizátoron: _____.

D3. Annak a valószínűsége, hogy egy f állapotú foton áthalad egy F polarizátoron: _____.

D4. Annak a valószínűsége, hogy egy f állapotú foton áthalad egy V polarizátoron: _____.

D5. A $v \rightarrow f$ vagy $f \rightarrow v$ áthaladás valószínűsége egyenlő: $p = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})^2 =$ _____

E. Az f állapotban lévő fotonokhoz és a v állapotban lévő fotonokhoz kapcsolódó tulajdonságok kölcsönösen kizárják egymást. Azokat az állapotokat, amelyekben ezeket a fotonokat találjuk, érdemes

- ☐ Egymásra merőleges vektorokkal
- ☐ Párhuzamos vektorokkal
- ☐ Vektorokkal, melyek bezárt szöge: $\theta =$ _____
jelölnünk.

Két állapot ortogonális, ha jellemző tulajdonságaik egymást kölcsönösen kizárják.

2. Hipotézisek vizsgálata

A. **hipotézis:** Egy 45° -osan polarizált fotonnyaláb félig függőleges polarizációjú, félig vízszintes polarizációjú fotonokból áll.

A1. Ebben az értelmezésben a Ψ_1^2 jelentése:

- ☐ Az a $p(v)$ valószínűség, hogy egy foton rendelkezik azzal a tulajdonsággal (*), amely lehetővé teszi a polarizátoron (melynek iránya vízszintes) történő áthaladást.
- ☐ Az a $p(f)$ valószínűség, hogy egy foton rendelkezik azzal a tulajdonsággal (Δ), amely lehetővé teszi a polarizátoron (melynek iránya függőleges) történő áthaladást.
- ☐ Egyéb (részletezze) _____

A2. Ebben az értelmezésben a Ψ_2^2 jelentése:

- ☐ Az a $p(v)$ valószínűség, hogy egy foton rendelkezik azzal a tulajdonsággal (*), amely lehetővé teszi a polarizátoron (melynek iránya vízszintes) történő áthaladást.
- ☐ Az a $p(f)$ valószínűség, hogy egy foton rendelkezik azzal a tulajdonsággal (Δ), amely lehetővé teszi a polarizátoron (melynek iránya függőleges) történő áthaladást.
- ☐ Egyéb (részletezze) _____

B. Egy $\mathbf{u}$ vektorral jellemzett fotonnyaláb áthalad egy $\mathbf{W}$ irányú polarizátoron.

B1. Mivel az $\mathbf{u}$ vektor kifejezhető az $\mathbf{u} = \Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}$ alakban, ezért a valószínűség, hogy egy foton áthalad a polarizátoron, így a D detektor jelez:

$$p(D) = p(u \rightarrow w) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 = [(\Psi_1 \mathbf{f} + \Psi_2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}]^2 = [\quad + \quad]^2 = \\ = \quad + \quad + \quad (*)$$

B2. A $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$ tényező biztosítja azt a $p(D|\mathbf{v})$ valószínűséget, hogy a D detektor jelez, azaz hogy az áthaladt foton vízszintesen polarizált.

B2.1 A $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{w})^2$ tényező adja meg

B3. A $(*)$ összefüggés első tagja, a $\Psi_1^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w})^2$ szorzat nem más, mint annak a valószínűsége, hogy az F tulajdonságú foton áthalad a polarizátoron és ezért beérkezik a D detektorba.

B3.1. A $(*)$ összefüggés másik tagja, a $\Psi_2^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$ szorzat, nem más, mint annak a valószínűsége, hogy $\Psi_2^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$

C. Ha az A. *hipotézis* igaz, akkor annak a valószínűsége, hogy a foton megjelenik a polarizátor mögött:

$$p(D) = \Psi_1^2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{f})^2 + \Psi_2^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{f})^2 = p(V)p(D|V) + p(F)p(D|F)$$

C1. A $(*)$ összefüggés vegyes tagja, melyet a $2\Psi_1\Psi_2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ szorzat ad meg, nincs tehát összhangban az A. *hipotézissel* (azaz nincs klasszikus megfelelője).

A $(*)$ eredmény a kvantumos szuperpozíció elve (azaz az, hogy minden vektor-állapot kifejezhető lineáris kombinációként), kifejezi azt a tényt, hogy a 45° -osan polarizált fotonnyaláb nem tekinthető úgy, mint két különböző tulajdonságú azonos számú fotonból álló nyaláb összessége, ha ezek egymást kizáró tulajdonságúak. Így tehát ismét arra jutunk, hogy el kell vetnünk az A. *hipotézist*.

D. A szuperpozíció elvének alkalmazása

D1. Megmutatjuk a kvantumállapotok szuperpozíciójának jelentőségét, a 45° -os polarizációjú foton konkrét esetében (amelyet u_{45} -tel jelölünk), amit a v és f állapotok szuperpozíciójának tekintünk, amelyeket a v és f egységvektor jelöl.

C2. Mi a kvantumos szuperpozíció elv fizikai jelentése és hogyan fejezhető ki matematikailag?

9. B. Függelék. A pre/post teszt

1. Az alábbiak közül melyik a kvantummechanikai mérés legsajátosabb, a klasszikus fizikától különböző tulajdonsága? (C)

- A) Bizonyos esetekben diszkrét értékeket mérünk.
- B) A mérések kimenetelét csak valószínűségekkel adhatjuk meg.
- C) Az azonos módon előkészített fizikai rendszerek általában eltérő mérési eredményt adnak, ha mérést hajtunk végre rajtuk.
- D) A mérőberendezéssel való kölcsönhatás megzavarja a rendszert.
- E) A mérés eredményét egy ismeretlen folyamat befolyásolja.

2. Tekintsük a következő valószínűséggel kapcsolatos folyamatokat:

- (i) Egy érmével $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dobunk fejet.
- (ii) Egy függőlegesen polarizált foton $\frac{1}{2}$ eséllyel halad át egy 45° -os polarizátor lemezen.

Válassza ki a helyes állítást! (A)

- A) Az (i) esetben nem tudjuk elég pontosan a kezdeti feltételeket, ezért kell valószínűségeket használnunk. A (ii) esetben a kezdeti feltételek ismertek, a valószínűségi kijelentés szükségessége a jelenség természetéből adódik.
- B) Mindkét esetben a kezdeti feltételek hiánya miatt teszünk valószínűségi kijelentéseket.
- C) Az (i) esetben nem tudjuk elég pontosan a kezdeti feltételeket, ezért kell valószínűségeket használnunk, azonban az (ii) esetben az teszi szükségessé a valószínűségi kijelentést, hogy nem ismerjük pontosan a foton és a polarizátor lemez kölcsönhatásának részleteit.

3. Az alábbi állítások közül melyik tükrözi legjobban a kvantumbizonytalanság lényegét? (A)

- A) Minden rendszerben vannak olyan fizikai mennyiség párok, amelyeket nem lehet egyszerre tetszőleges pontossággal meghatározni.
- B) Egy fizikai megfigyelés sosem lehet tetszőlegesen pontos.
- C) Egy mérés hibája sosem lehet végtelenül kicsi.
- D) Még elvileg sem lehet pontosan megjósolni a mérések eredményeit.
- E) Egy részecske helyét és impulzusát egyszerre nem lehet tetszőleges pontossággal megadni.

4. A klasszikus mechanikában mindig lehet pályát rendelni egy részecskéhez. Melyik állítás vonatkozik a kvantumrészecskékre? (E)

- A) Lehetséges pályát rendelni a részecskéhez, azonban annak minden részletét nem határozhatjuk meg tetszőleges pontossággal.
- B) Hozzárendelhetünk pályát a részecskékhöz, azonban ezt lehetetlen méréssel meghatározni.
- C) Csak akkor rendelhetünk pályát a részecskéhez, ha a részecske helyét mérjük.
- D) Nem lehet pályát rendelni a részecskékhöz a mérés miatt bekövetkező zavaró hatások miatt.
- E) Még elvileg sem lehet a részecskékhöz pályát rendelni.

5. Tegyük fel, hogy egy 45° polarizációjú fénysugarat egy kalcitkristály két nyalábbá bont szét: egy vízszintesen és egy függőlegesen polarizált fénysugarat kapunk. Ha valamilyen módon ezt a két nyalábot fordított állású kalcitkristállyal újra egyesítjük, milyen polarizációjú lesz a kapott fénynyaláb? (B)

- A) Az egyesített fénynyaláb félig vízszintesen, félig függőlegesen polarizált fotonokból áll.
- B) Az egyesített fénynyaláb 45° -osan polarizált fotonokból áll.
- C) Az egyesített fénynyaláb polarizálatlan lesz.
- D) A fotonok egyszerre függőlegesen is és vízszintesen is polarizáltak.

6. Válassza ki a helyes állítást a klasszikus fizika és kvantummechanika kapcsolatára vonatkozóan. (B)

- A) A klasszikus fizika és a kvantummechanika merőben más törvények szerint működik, a kettő nem összeegyeztethető össze.
- B) A kvantummechanika határesetként tartalmazza a klasszikus fizikát.
- C) A klasszikus fizika alkalmazható a kvantumvilágban, de fordítva nem.
- D) A kvantummechanika és a klasszikus fizika leírásmódja egyenértékű.

7. Egy polarizálatlan fénynyaláb áthalad egymás után két polarizátor lemezen. Az első polarizátor lemez a beérkező fény intenzitását felére csökkenti, majd az így kapott nyaláb intenzitását a második polarizátor lemez ismét felére csökkenti. Végeredményben az eredeti fényerő $\frac{1}{4}$ -ére csökken. Melyik állítás helyes? (D)

A) Az egyes polarizátor lemezek minden egyes foton energiáját felére csökkentik, amikor áthalad.

B) Ezek a polarizátor lemezek olyanok, hogy minden helyzetben elnyelik a fotonok felét.

C) A polarizátor lemezek helyzete olyan, hogy pontosan a fotonok fele halad át rajtuk.

D) A polarizátor lemezek helyzete olyan, hogy minden foton $\frac{1}{2}$ valószínűséggel halad át rajtuk.

8. Fogalmazza meg saját szavaival, mit jelenthet a fizikai állapot fogalma a klasszikus fizikában és a kvantummechanikában!

9. Fogalmazza meg saját szavaival, hogy az elektromágneses hullámok hogyan értelmezhetők fotonokkal?