Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

NEHÉZSÉGI ERŐ KÖZÉPISKOLÁBAN

EGY ROSSZ SZOKÁS VAGY HASZNOS HAGYATÉK?

Készítette:

Tóth Kristóf

Fizika-matematika osztatlan tanárszak

VI. évfolyam

Témavezetők:

Tél Tamás

Egyetemi tanár

Elméleti Fizikai Tanszék

Tasnádi Péter

Egyetemi tanár

Meteorológiai Tanszék

Tartalomjegyzék

KIVONAT

A nehézségi erő már a fizikaoktatás elején bevezetésre kerül és végigkíséri a diákok tanulmányait az általános iskolától egészen az érettségiig. Így számunkra teljesen természetesnek tűnik ennek a fogalomnak a használata, és fel sem tesszük a kérdést, hogy vajon helyes-e a közoktatásban megjeleníteni.

Dolgozatomban rávilágítok, hogy ennek az elvont, didaktikai buktatókat rejtő fogalomnak a bevezetése miféle előnyöket és hátrányokat hordoz, ezenfelül bemutatok tipikus tankönyvi hibákat és fogalmi ellentmondásokat is.

A problémák felvetése mellett javaslattal is élek, mely szubjektív véleményt az olvasó saját belátása szerint értékelhet, hiszen írásom célja mindössze egy szakmódszertani elmélkedés megosztása egy olyan témakörről, melyre talán nincs is tökéletes recept.

A dolgozat a nehézségi erő tanításának nehézségei mellett a modellezés szerepét is boncolgatja, amelynek megértése szükséges a természettudományok működésének értelmezéséhez, azonban a jelen oktatási viszonyok éppen ezekkel az alapelvekkel mennek szembe. Konkrét példaként vizsgálom, hogy általános, illetve középiskolában milyen kerekítést érdemes alkalmazni a gravitációs és nehézségi gyorsulás megadásakor.

1. A MODELLEK, KEREKÍTÉSEK ÉS KÖZELÍTÉSEK SZEREPE A TUDOMÁNYBAN

A dolgozat és e fejezet megírását az ösztönözte, hogy a nehézségi erő tipikusan egy olyan fogalom középiskolában, ahol a kerekítések és közelítések használata általában hibás. Továbbá a modellezést gyakran keverik az emberek a közelítéssel, így először ezek tisztázása történik.

Számos gyakorlati probléma megoldása modellezéssel történik. De mit is jelent a modell a tudományban? A természet megismerése megfigyeléseken keresztül történhet. Azonban amikor az ember egy új jelenséggel találkozik, megpróbálja azt korábbi tapasztalataival összehasonlítani. Olyan képet alkotunk a jelenségről, amellyel már képesek vagyunk megmagyarázni azt. A modell tehát megalkotásának módjából adódóan egyszerű, csak kevés részlet megválaszolására törekszik, így segítve világunk hatékony megismerését. Természetesen egyszerűségüknél fogva a modellek egymással ellentmondásban lehetnek, hiszen a lényegtelen tényezőket teljesen figyelmen kívül hagytuk. Ugyanakkor az egyszerűsítés mértéke nem lehet olyan fokú sem, hogy a lényeg elvesszen [1][2][3]. Példaként vegyünk egy mindenki általál ismert modellt:

A Bohr-féle atommodell nem az objektív, fizikai valóságot írja le. Bohr feltevéseiből rövid idő után a tapasztalatainknak ellentmondó állításokra jutnánk. Azonban egy nagyon szemléletes kép, mely sok esetben megkönnyíti gondolkozásunkat, illeszkedik a klasszikus fizikán alapuló képzelőerőnkre, emellett szemléletesen építi be a de Broglie-hipotézist, s nagyon egyszerűen meghatározhatjuk a hidrogén lehetséges energiaértékeit is. Bizonyos problémákra kiválóan működik, egyes kérdésekre, például a kémiai kötésekre azonban téves válaszokat ad. Ha teljes képet szeretnénk kapni a mikrovilágról, akkor a kvantummechanikához kell fordulnunk. Azonban a kvantummechanika törvényei lényegesen bonyolultabb úton adják meg hidrogén energiaértékeit. Hiába ad a kvantumfizika sok kérdésre pontos választ, mégis ilyenkor inkább a Bohr-modell szemléletét használjuk. A modellek használatának ezenfelül a fizikatanításban is fontos szerepe van, hiszen gyakran szemléletes képekkel magyarázhatunk el az alapvetően bonyolult jelenségeket.

A modellezés mellett másik rendszeresen használt tudományos módszer a kerekítés. A mérőeszközeink mérési hibája javítható, elméletben tetszőlegesen kicsivé tehető, azonban pontosan nulla sohasem lehet, mert az végtelen ráfordítást igényelne. Az adott mérési pontosság tehát rögzíti azt, hogy a fizikai mennyiségek számértékét hány értékesjegyre kerekítsük, mely sosem lehet végtelenül pontos.

Vannak olyan esetek, amikor bizonyos tényezőket elhanyagolhatunk, azaz közelítést végzünk. Ezen elhanyagolások olyan mértékben megkönnyíthetik munkánkat, hogy a feladatok elkezdése előtt kötelességünk mérlegelni, hogy milyen könnyítésekkel éljünk. Erre a módszerre a közoktatásban a diákok ismereteinek korlátai miatt erősen hagyatkozunk. Ez történik akkor, amikor egy testet annak tömegközéppontjának mozgásával írunk le, vagy amikor egyszerű hajítási feladatoknál a Föld forgását elhanyagoljuk.

Mivel a fizikaoktatás egyik célja a természettudományos megismerési módszerek átadása, *a természettudományos gondolkozás elsajátításához a fizikai modellek megértése, a megfelelő kerekítések és közelítések használata is hozzátartozik.* Ezek azok a vonások, melyek révén a diák megértheti, hogy a fizika nem egyszerű matematikai képletekbe történő behelyettesítés, hanem a matematikát használó, de az abban ismertektől eltérő fontos fogalmakat is használó tudomány.

A dolgozat *2. fejezetében* tisztázom a gravitációs és nehézségi erő, illetve gyorsulás fogalmát, s megadom hány tizedesjegyre érdemes kerekíteni. Ezt követően szubjektív javaslatokat teszek, melyek tanítási tapasztalataimra támaszkodnak. Az olvasónak javaslom a *Függelék* áttekintését is, melyben a súlyerő problémakörét vizsgálom, ahol szintén személyes gondolataim olvashatóak.

2. A FOGALMAK TISZTÁZÁSA

2.1 A Newton-törvények helyes értelmezése

Ez a fejezet az alapvető fogalmakat tisztázza, amelyeket a nehézségi erő fogalma igényel.

Egy test mozgásának leírásához szükségünk van egy másik testre, vagy testrendszerre, melyhez viszonyítva megadjuk annak helyzetét minden időpillanatban. Ezért definiáljuk a *vonatkoztatási rendszer* fogalmát:

„Az a merev vagy merev testnek tekinthető testrendszer, melyekhez viszonyítva megadjuk a test helyzetét." [4]

A mechanika posztulátumait Newton fogalmazta meg. Elsőként *Newton első törvényét* (N1) veszem górcső alá, mely eredeti megfogalmazásban így szól:

„Minden test megmarad nyugalmi helyzetében vagy egyenesvonalú egyenletes mozgásában, amíg külső erő nem hat rá." [5]

Sok helyen ezt az alakot olvashatjuk első posztulátumként. Azonban ez a megfogalmazás így nem helytálló, gondoljunk csak egy hirtelen gyorsuló autóbuszra, ahol a csomagok a mozgás irányával ellentétesen elmozdulnak. A problémát az okozza, hogy meg kell adnunk azokat a vonatkoztatási rendszereket, ahol a törvény igaz. A tapasztalataink pedig azt mutatják, hogy ilyenek vannak, közismert példa az állócsillagokhoz rögzített rendszer. Ezeket figyelembe véve N1 korrektebb formája a következő:

„Vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a testek mindaddig megtartják nyugalmi vagy egyenesvonalú egyenletes mozgási állapotukat, amíg külső erő nem hat rájuk." [5]

Ezeket a vonatkoztatási rendszereket pedig *inerciarendszereknek* nevezzük. Azaz N1 tartalma az, hogy inerciarendszerekben érvényesek a Newton-törvények a megszokott formában.

A fentiek nem csak a későbbi fogalmak megértéséhez szükségesek, de egyes tankönyvek hibát vétenek annak definiálásában:

„A testek helyét mindig más testekhez viszonyítva adjuk meg. Azt a testet, amelyhez a többi test helyét viszonyítjuk, vonatkoztatási testnek nevezzük. Az ehhez a testhez viszonyított helyet egyértelműen, számszerű adatokkal határozzuk meg, ezért koordináta-rendszert rögzítünk hozzá. Ezt vonatkoztatási rendszernek nevezzük." [6]

Majd később:

„Az olyan vonatkoztatási rendszereket, amelyekben a magára hagyott, más testek hatásától mentes testek sebessége sem nagyság, sem irány szerint nem változik, azaz amelyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, inerciarendszernek nevezzük." [7]

A tankönyv a vonatkoztatási rendszer fogalmát koordináta-rendszerhez köti, s az inerciarendszert egy speciális vonatkoztatási rendszerként definiálja. A fenti gondolatmenet tehát azt mondja, hogy a tehetetlenség törvényének kimondása csak koordináta-rendszer rögzítése után tehető meg. Azonban a valóságban a koordináta-rendszernek semmi köze nincs a Newton törvények érvényességéhez.

Newton második törvénye (N2) pedig:

Egy m tömegű anyagi pont az $\boldsymbol{F}$ erő hatására az alábbi összefüggés szerint mozog:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p},$$

ahol $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ a tömegpont impulzusa. Ha az anyagi pont tömege állandó, akkor mindezt felírhatjuk az alábbi alakban is:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

ahol $\boldsymbol{a}$ a tömegpont gyorsulása.

Végezetül *Newton harmadik törvénye* (N3), mely szintén csak inerciarendszerben érvényes:

„Ha valamely A test erőt fejt ki a B testre, akkor B ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat A-ra." [8]

2.2 A gravitációs gyorsulás

Ha egy testre csak a Föld gravitációs mezője hat, akkor N2 az alábbi alakban irható fel:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F_{gr}}$$

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} = -\gamma\frac{m \cdot M}{R^2}\boldsymbol{e_z},$$

ahol $\mathbf{e_z}$ az M tömegű pontszerű vonzócentrumból (Föld) az m tömegű testhez húzott egységvektor.

Éljünk azzal a közelítéssel, hogy a Földet nyugvó homogén gömbnek tekintjük. A geofizikai szakirodalomban fellelhető adatokkal számoltam, melyet az *1. táblázat* mutat.

Gravitációs állandó (γ)	Föld tömege (M)	Föld átlagos sugara (R)
$6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ m^3/kgs^2$ [9]	$5{,}9723 \cdot 10^{24}\ kg$ [10]	$6{,}3710 \cdot 10^{6}\ m$ [11]

1. táblázat: A számoláshoz felhasznált adatok.

Így egy szabadon eső test mozgása esetén a *gravitációs gyorsulás* nagysága könnyedén számolható:

$$g_{gr} = \gamma \cdot \frac{M}{R^2} = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}3710 \cdot 10^6\ m)^2} = 9{,}8180\ \frac{m}{s^2} \approx 9{,}8 \frac{m}{s^2}. \quad (2.1)$$

Végrehajtottunk egy olyan számolást, amelyet középiskolában is szokás elvégezni, továbbá már az általános iskolában is elmondjuk, hogy az elejtett testek a Föld gravitációs vonzása miatt gyorsulnak a Föld középpontja felé, éppen a fenti számértékkel.

Az *1. táblázat* adatait két függvénytáblázattal is összevetettem. Az egyikben a Föld tömegére $5{,}973 \cdot 10^{24}\ kg$ értéket írnak, azonban egy oldallal később már $5{,}976 \cdot 10^{24}\ kg$-ot, a Föld átlagos sugarára és a gravitációs állandó viszont azonos a fentiekkel [12]. A másik függvénytáblázat már erősebb kerekítést használ. Habár a gravitációs állandó értéke ott is az *1. táblázatban* feltűntetett érték, a Föld tömegére már csak az $5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$ két tizedesjegy pontos eredményt adja meg, átlagos sugárra pedig a $6{,}4 \cdot 10^6\ m$ értéket közli [13]. A továbbiakban ezért én 3 tizedesjegy pontossággal számolok.

A *1. fejezetben* ismertetett kerekítés szerepe a fizika tanításának módszertanában is fontos, hiszen nagyon leegyszerűsíti számításainkat az, ha a gravitációs gyorsulás értékét $10\ m/s^2$-re kerekítve adjuk meg. Ezzel amellett, hogy nagyságrendileg pontos eredményt kapunk, nagyban megkönnyítjük például az általános iskolás feladatok számolásainak nehézségét szintjét: a szabadon elejtett test másodpercenként $10\ m/s$-mal növeli a sebességét.

2.3 A tehetetlenségi erők

Bizonyos esetekben kényelmesebb olyan vonatkoztatási rendszert választani, amely nem inerciarendszer. Vegyük például a hétköznapi jelenségeket, melyeket a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben érdemes vizsgálni, ugyanis mi magunk vagyunk a megfigyelők. Ez abban az esetben nem tekinthető inerciarendszernek, ha a Föld forgása már olyan nagy hatással van a megfigyelt objektumra, hogy ennek elhanyagolása számításunkat tévútra viszi. Így azonban N2 a *2.1 fejezetben* tárgyaltak szerint nem írható fel. Miért is adnánk meg minden esetben a különböző objektumok mozgását az állócsillagokhoz képest, ha ez számos nehézséggel jár?

Tisztán kinematikai úton levezethető egy olyan formula (a mechanika tankönyvekben megtalálható), melynek segítségével nem-inerciarendszerekben is megoldhatjuk a mozgásegyenletet:

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{a_0} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}',$$

ahol a vesszővel ellátott kifejezések a nem-inerciarendszerben mérhető fizikai mennyiségre utalnak.

Vezessük be a következő eljelöléseket

- $\boldsymbol{F'} = m\boldsymbol{a'}$ a nem-inerciarendszerben fellépő gyorsuláshoz rendelhető erő dimenziójú mennyiség,
- $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$ N2 értelmében itt az **F** az inerciarendszerben fellépő erők eredője.
- $\boldsymbol{F_t} = -m\boldsymbol{a_0}$ a transzlációs tehetetlenségi erő,
- $\boldsymbol{F_{Co}} = 2m(\boldsymbol{v'} \times \boldsymbol{\omega})$ Coriolis-erő,
- $\boldsymbol{F_{cf}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r'})$ centrifugális erő,
- $\boldsymbol{F_{Eu}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r'}$ Euler-erő.

Így az egyenlet az alábbi alakban is felírható:

$$\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F_0} + \boldsymbol{F_{Co}} + \boldsymbol{F_{cf}} + \boldsymbol{F_{Eu}}.$$

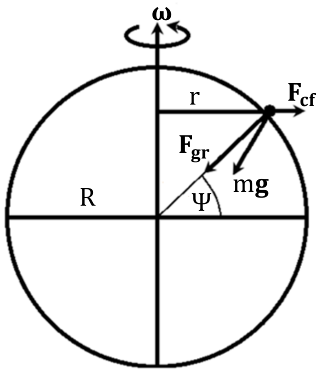
Az $\boldsymbol{F_0}, \boldsymbol{F_{Co}}, \boldsymbol{F_{cf}}, \boldsymbol{F_{Eu}}$ mennyiségeket összefoglalóan tehetetlenségi erőknek nevezzük [14], $\boldsymbol{F}$ pedig az inerciarendszerben fellépő erők eredője. Fontos hangsúlyozni, hogy a Newton-törvények rendszere az erőre fontos állításokat tesz, például, hogy van ellenereje (lásd N3). Azonban ez a tehetetlenségi erőkre nem érvényes, azoknak nincs ellenerejük, hiszen csak a nem-inerciarendszerbeli mozgás leírásából adódó korrekciós tagok, csupán annak a kényelmét szolgálják, hogy a megfigyelő bármilyen vonatkoztatási rendszerben megoldhasson mechanikai problémákat ugyanabban a szellemben, ahogy inerciarendszerben (hiszen az $\boldsymbol{F}$ már tartalmazza az összes testre ható erőt). A mozgásegyenlet így módosított alakjában megjelenő tehetetlenségi erők, megtévesztő nevük ellenére, nem minősülnek fizikai értelemben vett *erő*knek, azonban a megfigyelő számára hasonló jellege miatt szokás fiktív erőknek is nevezni őket.

3.4 A nehézségi gyorsulás

Mint láttuk, olykor célszerűbb Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszert használni. Ekkor azonban a *2.2. fejezetben* felírt képletet is módosítani kell. Így a korábban tárgyalt N2 módosított alakja a következő (tekintsünk a Földhöz képest álló testet ($v' = 0$), s használjuk, hogy a Föld szöggyorsulása elhanyagolható ($\dot{\omega} \approx 0$)):

$$m\boldsymbol{a'} = -\gamma \frac{mM}{R^2}\boldsymbol{e_z} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \tag{2.2}$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ a Föld forgásának szögsebessége $2\pi/(23{,}93h)$. A szokásos jelölésrendszerben $\boldsymbol{a'} \equiv \boldsymbol{g}$, elnevezése: *nehézségi gyorsulás*, $m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F_n}$ *nehézségi erő* [15]. A nehézségi erő úgy is tekinthető, mint a Föld felszínének közelében szabadon eső testre ható erő. Az így elvégzett számolásokat a *2.5 fejezet* tartalmazza.[1]



1. ábra: A nehézségi erő ($m\boldsymbol{g}$) szemléltetése gömb alakú Földet feltételezve. A szélességi fokot ψ, a forgástengelytől mért távolságot r, a centrifugális erőt pedig $\boldsymbol{F_{cf}}$ jelöli. A vektorok nem méretarányosak, ugyanis az $\boldsymbol{F_{cf}}$ nagysága kb 300-szor kisebb, mint az $\boldsymbol{F_{gr}}$ nagysága.

Mivel a nehézségi gyorsulás célja a földi folyamatok pontosabb leírása, ezért a nehézségi gyorsulásban általában egyéb tényezőket is figyelembe vesznek, további korrekciókat is beleillesztenek. Ilyen például a Föld inhomogén tömegeloszlása, a Föld lapultsága (amely éppen a Föld forgásának köszönhető), árapály erők figyelembevétele stb [16]. Ezért általában a nehézségi gyorsulás értékét nem a (2.2)-ben felírt módon számolják. A mérések szerint a g nehézségi gyorsulás Magyarországon kb. $9{,}81\ m/s^2$ értékkel egyezik meg. Vegyük észre, hogy a *2.2 fejezetben* kiszámolt g_{gr} gravitációs gyorsulás értéke 1%-os hibahatáron belül van.

A *2.3 fejezetből* levonhatjuk a következtetést, hogy a nehézségi erő megtévesztő neve ellenére nem minden esetben tekinthető fizikai értelemben vett erőnek, ugyanis, ha a Föld forgását is figyelembe vesszük, akkor egy valódi erő (gravitációs) és egy fiktív-erő (centrifugális) eredője, ezért a nehézségi erőnek ilyenkor nincs ellenereje. Ennek didaktikai tárgyalása középiskolában túl nehéz. Továbbá a Föld forgásának figyelembevételével a nehézségi erő (és nehézségi gyorsulás) iránya nem a Föld középpontja felé mutat.

Éppen ezek a problémák okozzák azt, hogy a nehézségi gyorsulást a közoktatásban a gravitációs gyorsulás szinonimájaként használjuk, a nehézségi erőt pedig a Föld által, a testekre kifejtett gravitációs erővel azonosítjuk. Lényegében bevezetünk egy új fogalmat, majd a

[1] Általában a nehézségi gyorsulásnak alatt a test gyorsulásának Föld középpontja felé mutató komponensét értik. De ezt éppen azért tehetik meg, mert a vízszintes komponens hatása elhanyagolható. Mivel azt vizsgálom, hogy a különböző hatások hányadik tizedesjegyben fejtik ki hatásukat, ezért ezt a közelítést nem alkalmazom.

szakmódszertani nehézségek miatt azonosítjuk azt egy egyszerűbb fogalommal. Ezáltal azonban elveszhet a nehézségi erő fogalmának lényege.

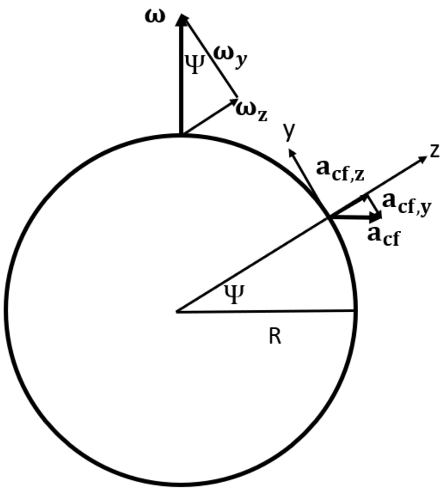
2.5 Egyéb hatások becslése

Felmerülhet a kérdés a fizikatanárokban, hogy a különböző hatások hányadik tizedesjegyben mutatkoznak meg a g értékében. A *2. táblázatban* a számoláshoz felhasznált további adatokat láthatjuk.

Föld forgási sebessége (ω)	Föld szöggyorsulása ($\dot{\omega}$)	Budapest földrajzi szélessége (Ψ)
$7{,}294 \cdot 10^{-5}$ s	$-4{,}8 \cdot 10^{-22}\ 1/\mathrm{s}^2$ [17]	$47{,}5°$

2. táblázat: A számoláshoz felhasznált adatok.

Ahhoz, hogy a különböző tehetetlenségi erőket kiszámolhassuk, koordináta-rendszert kell rögzíteni, melynek irányát a *2. ábra* mutatja.



2. ábra: A gömb alakú Földön a megfigyelőhöz rögzített koordinátarendszert mutatja az ábra. Az x tengely befelé mutat (jobb sodrású rendszer), a Ψ pedig a földrajzi szélességet jelenti. Fontos megjegyezni, hogy a Ψ szélességi körön felvett koordináta-rendszer lokális. Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességet mindig a vizsgálódási pontban felvett lokális koordináta-rendszer irányai szerint kell felbontanunk, azaz mindig a lokális irányok mentén.

Gömb alakú Földet feltételezve a centrifugális gyorsulást a *2. ábra* jelöléseivel a (2.2)-ben leírt módon számolhatjuk:

$$\boldsymbol{a_{cf}} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{\omega_z} + \boldsymbol{\omega_y}) \times (\boldsymbol{\omega_y} \times \boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\omega_z} \times (\boldsymbol{\omega_y} \times \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega_y} \times (\boldsymbol{\omega_y} \times \boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a_{cf}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_z \cdot \omega_y \cdot R \\ \omega_y^2 \cdot R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \cos\Psi \sin\Psi \cdot R \\ \omega^2 \cos^2\Psi \cdot R \end{pmatrix}.$$

Vagyis a centrifugális gyorsulás nagyságrendje $\omega^2 R = 3{,}4 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$, mely a gravitációs gyorsulás kb. 0,5%-a.

Ezt felhasználva a nehézségi gyorsulás:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g_{gr}} + \boldsymbol{a_{cf}} = -\gamma \frac{M}{R^2}\boldsymbol{e_z} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \cos\Psi \sin\Psi \cdot R \\ \omega^2 \cos^2\Psi \cdot R - \gamma \dfrac{M}{R^2} \end{pmatrix},$$

vektor, melyből g nehézségi gyorsulás nagysága számolható:

$$g = \sqrt{\omega^4 \cos^2\Psi \sin^2\Psi\, R^2 + \left(\omega^2 \cos^2\Psi\, R - \gamma \frac{M}{R^2}\right)^2}.$$

Ez alapján Budapesten a $g = 9{,}803\ m/s^2$ értéket kapjuk.

A Föld lapultságát is figyelembe vevő pontos mérések szerint a g értéke $9{,}809\ m/s^2$ kapunk (a Föld lapultsága közelítőleg 1/300) [12][18].

Tekintsük most fentiek mellett a Coriolis-erőt is. Mozogjon a test $v' = 10\ m/s$ sebességgel Nyugat→Kelet irányba (ez az irány szükséges a test nehézségi gyorsulásának csökkenéséhez). Ilyen irányú mozgás során a Coriolis-gyorsulás:

$$\boldsymbol{a_{Co}} = 2\boldsymbol{v'} \times \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{v'} \times (\boldsymbol{\omega_z} + \boldsymbol{\omega_y}) = 2\boldsymbol{v'} \times \boldsymbol{\omega_z} + 2\boldsymbol{v'} \times \boldsymbol{\omega_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v'\omega_z \\ 2v'\omega_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_{Co}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v'\omega \sin\Psi \\ 2v'\omega \cos\Psi \end{pmatrix}.$$

Ennek nagyságrendje $v' = 10\ m/s$ esetén $2 \cdot v' \cdot \omega = 10^{-3}\ m/s^2$, a gravitációs gyorsulás 0,01%-a.

A gravitációs erő, centrifugális erő és Coriolis-erő figyelembevételével a nehézségi gyorsulás tehát:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g_{gr}} + \boldsymbol{a_{cf}} + \boldsymbol{a_{Co}} = -\gamma \frac{M}{R^2}\boldsymbol{e_z} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{v'} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v'\omega \sin\Psi - \omega^2 \cos\Psi \sin\Psi \cdot R \\ 2v'\omega \cos\Psi + \omega^2 \cos^2\Psi \cdot R - \gamma \dfrac{M}{R^2} \end{pmatrix},$$

melynek nagysága:

$$g = \sqrt{(2v'\omega \sin\Psi + \omega^2 \cos\Psi \sin\Psi \cdot R)^2 + \left(2v'\omega \cos\Psi + \omega^2 \cos^2\Psi \cdot R - \gamma \frac{M}{R^2}\right)^2}.$$

Ez Budapesten $g = 9{,}802\ m/s^2$. Látható, hogy a Coriolis-erő a harmadik tizedesjegyben jelenik meg. A keletre haladó testek súlycsökkenése az ún. Eötvös-hatás, melyet Eötvös Loránd 1919-ben irt le.
Természetesen $v' = -10\ m/s$-mal számolva (azaz Kelet→Nyugat irányú mozgást feltételezve) a nehézségi gyorsulás értéke nagyobb lesz: $g = 9{,}804\ m/s^2$.

Kiszámolható az Euler-gyorsulás is:

$$\boldsymbol{a_{Eu}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} = -(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{y}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}}) \times \boldsymbol{r} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_y R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \cos \Psi R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez azonban a többihez képest elhanyagolható, mert nagyságrendileg $\dot{\omega} R = 10^{-15}\ m/s^2$ változást okoz, iránya pedig a Földi megfigyelő számára vízszintes, tehát nem ad járulékot g-hez.

Vizsgáljuk külön a gravitációs gyorsulás magasságfüggését, mely a nehézségi gyorsulás magasságfüggését is okozza. A gömb alakúnak feltételezett nem forgó Föld felszínétől h magasságra a gravitációs törvény alapján a gravitációs gyorsulás:

$$g_{gr} = \gamma \frac{M}{(R+h)^2}.$$

Ebből $1\ km$ magasságban a $g_{gr} = 9{,}816\ m/s^2$-et kapjuk. Ez az érték 2 tizedesjegyig megegyezik a Föld felszínén számolt gravitációs gyorsulás értékével, így nem érdemes a g magasságfüggését említeni.

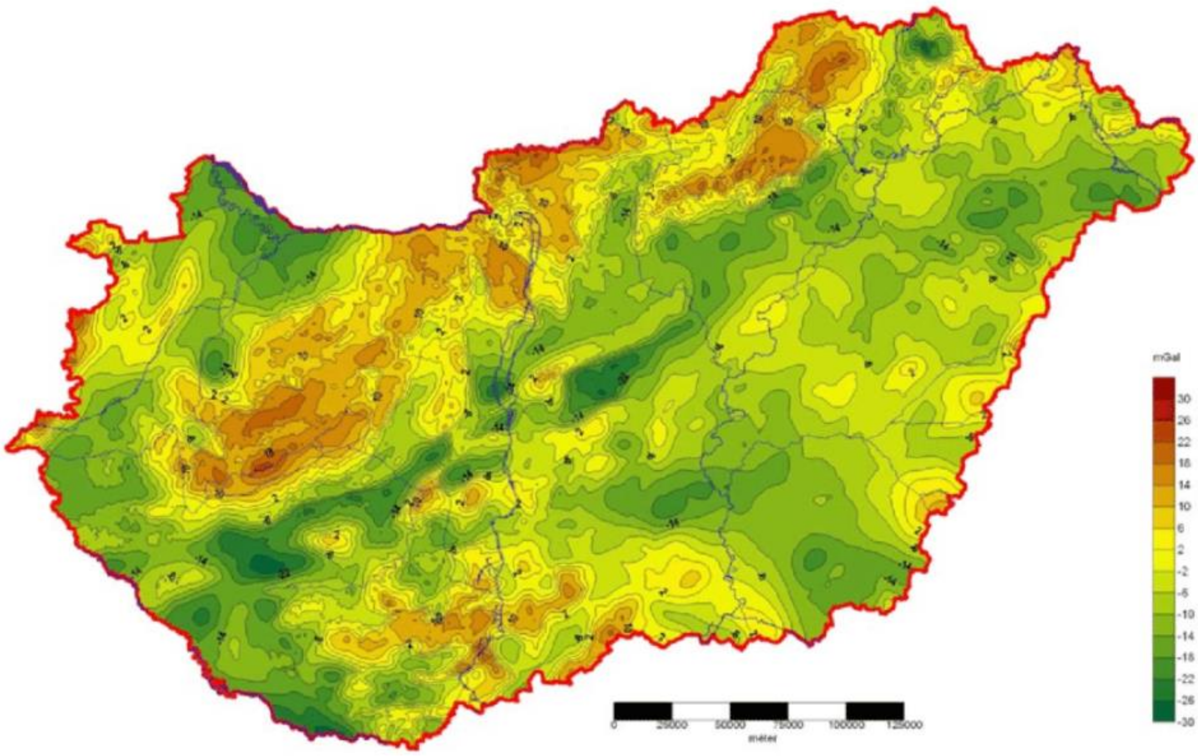
Általában jól becsülhető a magasságfüggés abból, hogy a (2.1) kifejezés R szerinti deriváltja az R helyen $-2\gamma M/R^3$, a felszíni g_{gr} értéktől való eltérés nagysága h magasságban, ezért

$$g_{gr} \frac{2h}{R}.$$

A $2h/R$ arány tehát megadja, hogy a gravitációs gyorsulás csökkenése hányszoros a felszíni értéknek. Az eltérés még $h = 3\ km$ esetén is kisebb, mint 0,1%, vagyis a közepes földrajzi szélességeken itt lépünk át abba a magasságba, ahol a 9,80 m/s^2 érték a helyesebb. Az eltérés még 10 km magasságban is csak 0,3%. Abban a könyvben, ahol a $g = 9{,}8\ m/s^2$ érték van megadva, az egész Földre nézve sem érdemes a magasságfüggésről beszélni.

Megjegyezhető, hogy a magasságfüggésben a centrifugális erő is megjelenik, de az végképp elhanyagolható, mert a $h = 1\ km$ az h/R nagyságrendű relatív növekedést eredményez a $10^{-2}\ m/s^2$ tipikus értékhez, azaz kevesebb mint $10^{-5}\ m/s^2$-et. A g-ben ez az 5. jegyben jelenik meg.

Ezek és a későbbi mérések alapján a gravitációs gyorsulás változása Magyarországon belül néhányszor $10^{-4}\ m/s^2$, azaz a 4. tizedesben jelenik meg [19]. A részletek leolvashatok az alábbi térképről:



3. ábra: A Föld inhomogenitásának hatása a nehézségi gyorsulás értékére Magyarországon. $1\ mGal = 10^{-5}\ m/s^2$ [20].

Az ár-apály hatás is befolyásolja a nehézségi gyorsulást, melynek nagyságrendje

$$\frac{M_H}{M} \cdot \left(\frac{R}{d_{FH}}\right)^3 \cdot g,$$

ahol a M_H a Hold tömege és d_{FH} a Hold Föld átlagos távolsága. Ennek számértéke körülbelül $10^{-6}\ m/s^2$, azaz a 6. tizedesjegyben jelenik be [15].

A kiszámolt értékeket a következő oldalon található *3. táblázat* összegzi.

A nehézségi gyorsulás számolásához felhasznált hatások, közelítések.	Egyenlítőn a g $(\mathrm{m/s^2})$	Budapesten a g $(\mathrm{m/s^2})$	Sarkokon a g $(\mathrm{m/s^2})$	Hányadik tizedesjegyben fejti ki hatását.
A Föld alakja gömb, csak gravitációs vonzás van.	9,818	9,818	9,818	1.
A gravitációs erő mellett centrifugális erő is hat gömb alakú Föld esetén.	9,785	9,803	9,818	2.
A gravitációs erő mellett centrifugális erő is hat lapult Föld esetén [13].	9,781	9,809	9,832	2.
A gravitációs és centrifugális erő mellett a Coriolis-erő is hat gömb alakú Földet feltételezve ($v' = 10\ m/s$, NY→K).	9,783	9,802	9,818	3.
Gravitációs vonzás, gömb alakú Föld esetén, $1\ km$ magasságban a felszíntől.	9,816	9,816	9,816	3.
Ha a fenti hatások mellett a Föld inhomogén tömegeloszlását is figyelembe vesszük.				4.
A gravitációs és centrifugális erő hatása $1\ km$ magasságban a felszíntő, ha a Föld gömb alakú.				5.
Ha az árapály hatást is figyelembevesszük.				6.

3. táblázat: A Földön jelentkező különböző hatások figyelembevétele a nehézségi gyorsulás szempontjából.

Eötvös munkássága megmutatja, hogy a Föld inhomogenitásának figyelembevétele nélkül számításainkat legfeljebb a 2. tizedesjegyig érdemes kiírni. A fenti számítások jól megmutatják, hogy a Föld egy nem forgó, homogén gömbként való közelítése mindössze $0{,}1\%$-os hibát jelent. Mivel a középiskolás feladatok során előforduló feladatok gyakran olyan eseteket is tartalmaznak, ahol a 2. tizedesjegy már nem pontos, ezért célszerűnek tartom a $g \approx 9{,}8\, m/s^2$ közelítés használatát. Így feladataink során semmiféle hatással nem kell foglalkoznunk, számolásaink érvényesek a sarkkörön, az Egyenlítőn és a Kékestetőn is. Ha viszont szeretnénk pontosabban leírni a magyarországi folyamatokat, akkor javasolt lehet a $9{,}81\, m/s^2$ használata.

3. PONTATLANSÁGOK, KÖVETKEZETLENSÉGEK A TANKÖNYVEKBEN

Egy ma forgalomban lévő hetedikes tankönyv a gravitációs erő fogalmát így tárgyalja:

Gravitációs erő

A Föld testekre kifejtett gyorsítóhatását a gravitációs erő fejti ki, ezt F_g-vel jelöljük. A szabadon eső testet tehát a gravitációs erő gyorsítja.
A gravitációs erő nagysága függ:
– a test tömegétől,
– a gravitációs gyorsulástól.
A gravitációs gyorsulást g-vel jelöljük.
Ennek az értéke kismértékben függ a földrajzi szélességtől, és a tengerszint feletti magasságtól is. A mi szélességi körünkön tengerszinten az értéke:

$$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A gravitációs erő nagysága: $F_g = m \cdot g$

Eötvös Loránd (1848–1919) magyar fizikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke volt. A Föld gravitációs hatását tanulmányozta.

Példa

Számítsuk ki, hogy mekkora erő gyorsítja az ablakpárkányról leeső virágcserepet, ha annak tömege 2 kg!
Megoldás:
Ezt a virágcserepet a gravitációs erő gyorsítja.
$m = 2$ kg
$g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$F_g = m \cdot g = 2\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 20\ \mathrm{N}$

4. ábra: Egy általános iskolás tankönyv részlete [21].

A tankönyvírók szokásos gondolata, miszerint a gravitációs gyorsulás függ a földrajzi szélességtől nem feltétlenül követendő. Mint tudjuk, a Föld csak közelítőleg tekinthető gömb alakúnak, mert kissé lapult. Azonban ezt a lapultságot éppen a Föld forgásának köszönheti, így ezen aspektus figyelembevétele a centrifugális erő említése nélkül véleményem szerint félrevezető. A diákokban joggal merül fel az a kérdés, hogy miért függ a gravitációs gyorsulás a szélességi körtől, s ennek módszertanilag helyes megválaszolása csak a gömb alaktól való eltérés alapján lenne lehetséges. Célszerűbbnek gondolom a Föld gömbként való közelítését (s mint jól láttuk ez igencsak pontosnak tekinthető).

Meggyőződtünk arról, hogy a magasságfüggés a Kékestetőn is kevesebb mint 0,1% különbséget jelentene, ezért a szövegben se a földrajzi szélességet, se a tengerszintet sem érdemes említeni. A fenti, konkrét általános iskolai esetben a mondat ezért úgy lenne például helyes, hogy „*Az értéke:* $g = 9{,}8\ m/s^2 \approx 10\ m/s^2$". Ez az egész kérdéskör azért jön elő, mert a köztudatba belesulykolták h a nehézségi gyorsulás függ a szélességi körtől és ezért van az hogy nehéz azt mondani, hogy ezzel nem kéne törődnünk.

A tankönyvszerzők ezt a hibát tovább tetőzik egy feladatban:

Kérdések, feladatok

1. Nézz utána, hogy mennyi a gravitációs gyorsulás értéke az Egyenlítőn, illetve az Északi- és a Déli-sarkon!

5. ábra: Az előző könyvben szereplő feladat [22].

A feladat hivatalos megoldása szerint a válasz:
„A „g” értéke a 45° szélességi körön $9{,}80665\ m/s^2$. *Az Északi- és Déli-sarkon* $g = 9{,}83\ m/s^2$. *Az egyenlítőn pedig* $9{,}78\ m/s^2$*.”* [23]
Azonban ezek az értékek a nehézségi gyorsulás mért értékei, melyben szerepet játszik a Föld lapultsága és a centrifugális erő nagysága is. A budapesti érték a Coriolis-erőt és Eötvös Loránd méréseit már nem veszi figyelembe, így az 5 tizedesjegy pontos megadás téves, továbbá a sarkokon és Egyenlítőn megadott értékek jóval kisebb pontossággal szerepelnek. Hetedikes szinten ez csak zavart kelt.

Egy kilencedikes tankönyv pedig így ír:
„Pontos mérések szerint: a szabadesés egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás. A szabadon eső testek gyorsulása Magyarországon, a föld közelében $9{,}81\ m/s^2$. *A szabadon eső testek gyorsulását nehézségi gyorsulásnak szokás nevezni és g-vel jelölni, tehát* $g\ =\ 9{,}81\ m/s^2$ *.”* [24]
Úgy gondolom a nehézségi gyorsulás ezen bevezetése helytálló. Pár sorral később ezt olvassuk:
„A $\vec{g}$ vektor iránya – természetesen – mindig függőlegesen lefelé mutat.” [24]
Majd a tankönyv 62 oldallal később így fogalmaz: *„A Föld forgása miatt a szabadon eső testek azonban nem pontosan függőlegesen esnek.”* [25]
A függőleges irányt éppen a nehézségi erő iránya definiálja. A tankönyvszerző gondolatából az derül ki, hogy ő a függőleges irányt a gravitációs iránnyal azonosítja, ami azonban téves.

Ennek a könyvnek külön érdekessége, hogy kiegészítő anyagként tartalmazza a tehetetlenségi erők leírását, melyből egy feladatot idézve:
„Egy zsigenre erősített golyót vízszintes síkban egyenletesen forgatunk. Mi itt a centripetális erő ellenereje? Mi a válasz erre a kérdésre a forgó vonatkoztatási rendszerben?” [26]
A könyv végén található megoldás így szól:
„Inerciarendszerben a golyó által a zsinegre kifejtett erő, ami feszíti a zsineget. Forgó rendszerben a centrifugális erő.” [27]
Azonban a centrifugális erőnek nincs ellenereje, ezért maga ez az erő sem állhat elő ellenerőként. Külön pikánssága a feladatnak, hogy a kérdés felett található leírásban a tankönyv szerzője így ír: *„Gyakran előfordul, hogy – a két erő elnevezésbeli hasonlósága miatt – egyesek*

tévesen azt hiszik, hogy a centripetális és a centrifugális erő egymással erő-ellenerő viszonyban van.” [27] További hiba, hogy *általában* a centripetális erőnek sincs ellenereje. Hiszen a centripetális erő a testre ható erők eredőjeként van definiálva. A rafinált olvasó mondhatná, hogy akkor az eredő erőt alkotó egyes erők ellenerejének összege lesz a centripetális erő ellenereje, azonban, ha az erők eredője több erőhatás együtteseként jön létre, akkor azokat különböző testek hozzák létre, tehát az így megalkotott ellenerő különböző testekre hatna.

Egy következő tankönyv így definiálja a kérdéses fogalmat:

„A szabadesésre jellemző gyorsulás, vagy más néven nehézségi, gravitációs gyorsulás értéke hazánkban a legpontosabb mérések szerint: $g = 9{,}81\ m/s^2$*. Számításoknál sokszor megfelelő a* $10\ m/s^2$ *kerekített érték.”* [28]

Jól látható, hogy a tankönyvírók a két fogalmat nem különböztetik meg. Azonban pár oldallal később már így fogalmaznak:

„A nehézségi erő iránya a függőleges irány, hiszen az erő iránya azonos az általa létrehozott gyorsulás irányával, a szabadesés g *gyorsulásával. Ez az irány jó közelítésben a Föld középpontja felé mutat, a pólusokon és az Egyenlítőn pontosan!”* [29]

A könyv tehát nem tesz különbséget a gravitációs gyorsulás és nehézségi gyorsulás fogalma között, azonban az azokat létrehozó nehézségi erőt és gravitációs erőt már nem veszi egy kalap alá.

Egy 2005. novemberi emelt szintű fizika érettségi feladat:

„Nagy magasságban kezdősebesség nélkül elejtenek egy 0,4 kg tömegű, gömb alakú testet. A zuhanó test mozgását a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő fékezi. (A közegellenállási erő nagysága ezért $F = Cv^2$ *alapján számolható, ahol C állandó.) Esetünkben a közegellenállási erő nagysága* $1\ m/s$ *sebességnél* $0{,}008\ N$*. Az elejtett test mozgását vizsgálva megállapítható, hogy* $20{,}7$ *méter zuhanás után sebessége* $16{,}8\ m/s$*. (Számoljunk* $g = 10\ m/s^2$ *értékkel!)”*

Az ehhez kapcsolódó b) kérdés pedig:

„Mekkora a test gyorsulása abban a pillanatban, amikor sebessége $16{,}8\ m/s$*?”* [30]

Az erre adott hivatalos megoldás pedig: $a = 4{,}355\ m/s^2$ [30].

Jól látható, hogy a feladat javasolja a diáknak a nehézségi gyorsulás értékének kerekítését, azonban a válasz már túl pontos: 4(!) értékes jegyre adja meg a számolt gyorsulás eredményét. Nem is célja, hogy egy emelt szinten érettségiző diák képes legyen eldönteni önállóan, hogy mikor lenne helytálló ez a közelítés. Számomra ez a diákok helyes kerekítési képességének gyakorlati ellehetetlenítése. Továbbá, ha a diák számításai során amúgy is számológép használatra szorul, akkor a $g \approx 10\ m/s^2$ erős kerekítést nem indokolt.

Most vizsgáljunk egy feladatgyűjteményben található példát:

„Mekkora sugarú körben fordulhat meg a sugárhajtású repülőgép, amelynek sebessége $1500\ km/h$*, ha a fellépő centripetális gyorsulás nem haladhatja meg a nehézségi gyorsulás* 10,2*-szeresét?* $g\ =\ 9{,}81\ m/s^2$. [31]

A sugárhajtású repülőgépekre ható nehézségi gyorsulás értéke biztosan nem $9{,}81\ m/s^2$ a repülési magasság miatt. Könnyen kiszámolható, hogy ha például 9 km-nek vesszük a repülési magasságot, abban az esetben a gravitációs gyorsulás értéke a (2.1) alapján már csak $g = 9{,}79\ m/s^2$, tehát a 2. tizedesjegy kiírása helytelen.

Az előbbi feladatgyűjteményben egy másik példa is olvasható:

„Az ember szervezete a nehézségi gyorsulás 5-szörösét viseli el károsodás nélkül." [32]

A feladat a pilóták körében elterjedt nyelvezetet használja, mely fizikailag téves. Ha jó közelítéssel homogén gravitációs erőtérben szabadon esünk, akkor a szervezetünk semmiféle hatást nem érzékel. A feladat arra utal, hogy egy körmozgás esetén (például repülőgéppel teszünk egy függőleges síkú kört), akkor a centripetális erő miatt akár akkora nyomóerő is felléphet, amely károsíthatja a belső szerveket, mert a szék által N3 értelmében kifejtett nyomóerőt minden sejt közvetíti.

Legvégül vizsgáljuk meg egy tankönyv írását a nehézségi erő és gravitációs erő kapcsolatáról. A könyv a Newton-féle gravitációs erő témakörében egy bekezdést szentel a gravitációs gyorsulás értékére.

„Vegyünk a Föld felszíne közelében egy m tömegű testet, amely szabadon esik. Jelöljük a Föld sugarát R-rel, tömege pedig legyen $M_{Föld}$*. A szabadon eső testre ható nehézségi erőt és a gravitációs erőt egyenlőnek tekinthetjük, így felírhatjuk:*

$$F_{neh} = F_g$$

$$mg = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_{Föld}}{R^2}$$

Ebből a Föld felszínén a gravitációs gyorsulás értéke:

$g_0 = \gamma \cdot \frac{M_{Föld}}{R^2}$*; behelyettesítve:*

$$g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}.$$

A Föld egyenlítőjén a gravitációs gyorsulás értéke a legkisebb, $9{,}78\ m/s^2$*. A sarkok felé haladva egyre nagyobb a gravitációs gyorsulás értéke, hazánkban* $9{,}81\ m/s^2$*, míg a sarkokon* $9{,}83\ m/s^2$*."* [33]

Úgy gondolom lehetne jobb az a megközelítés, hogy a tankönyv szerzője a gravitációs erőt és a nehézségi erőt egyenlőnek tekinti. Én inkább a szabadon eső test a mozgásegyenletéből indulnék ki:

$$F_e = F_g$$

$$m \cdot a = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_{Föld}}{R^2}.$$

Számomra éppen az a szép, hogy a kapott gyorsulás értéke a nehézségi gyorsulás értékét adja vissza. A diákok csak ezután tudják azonosítani a nehézségi erőt a gravitációs erővel. Azaz a korábban használt empirikus számértéket most már egy új erő ismeretével magyarázni is tudjuk. További javaslatként a 2. tizedesjegyet elhanyagolását fogalmaznám meg. A *2.5 fejezetb*en láthattuk, hogy a 2. tizedesjegy kiírása a gravitációs gyorsulás tárgyalásánál nem indokolt. Emellett az Egyenlítőn és sarkokon vett érték közlését sem tartom követendő példának, hiszen a számolás során éppen azt használtuk ki, hogy a Föld közelítőleg gömb alakú, a tehetetlenségi erőket pedig nem vettük számításba. Külön érdekesség, hogy a lecke végén kiegészítő bekezdésként tárgyalja a nehézségi erőt, mint a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője. Ebben az esetben a különböző szélességi körökön közölt számértékek itt megemlíthetők volnának.

4. A JELEN HELYZET MÓDSZERTANA ÉS A JAVASLAT

Összegezzük, hogy a nehézségi erőt (és gyorsulást) hogyan szokás tanítani.

1. Bevezetjük a nehézségi erő és nehézségi gyorsulás fogalmait úgy, hogy utóbbinál a diákoknak a megfelelő matematikai és fizikai eszköztára az értelmezéshez hiányos.
2. Megnevezzük ennek az előnyeit (pl. figyelembe veszi a Föld forgását).
3. A rá vonatkozó elméleti kérdésekben (mi az ellenereje), illetve számítási feladatokban azonosítjuk a gravitációs erővel és gravitációs gyorsulással a megfelelő fizikai fogalmakat, hogy elkerüljük a hiányos háttértudásból adódó módszertani problémákat.
4. Használjuk a $g \approx 10\ m/s^2$ erős közelítést, amellyel éppen a megkülönböztetés lehetőségét szüntetjük meg.

Az olvasó feltehetné a kérdést, hogy ha a nehézségi erő esetén az ellenerő ilyen didaktikai nehézségekkel jár, akkor miért kérdezünk rá egyáltalán? Bevett szokás a fizikatanításában, hogy N3 elsajátításához a dinamika feladatok során rákérdezünk az adott erők ellenerejére. Erre azért van szükség, mert a diákok hajlamosak olyan erőket is megnevezni, melyek nem léteznek, vagy habár léteznek, nem az adott testre hatnak. Azonban ezek kiszűrhetők azzal a kérdéssel, hogy melyik test fejti ki azt a bizonyos erőt, és hogy mi annak az ellenereje.

Összefoglalva azt mondhatom, hogy a nehézségi gyorsulás értékének szokásos erős kerekítése nem indokolja a nehézségi gyorsulás használatát. A fizikatanulás során el kell sajátítani, milyen pontossággal érdemes megadni a megoldásokat. A nehézségi erő és nehézségi gyorsulás ilyen körülmények között történő alkalmazása éppen attól a kulcsfontosságú, nevelő hatással bíró gondolattól fosztja meg a diákokat, hogy olykor a túl precíz gondolkozás hátráltathat, s hogyan könnyíthetjük meg életünket egyszerűsítésekkel. Éppen azt vesszük el a diákoktól, hogy a fizikai valóságban a végtelen pontosság egy idea, s minden leírt tizedesjegy fontos mondanivalóval bírhat. Ez pedig a fizikatanítás filozófiájával messzemenőleg szembe megy.

Javaslatként azt fogalmazhatom meg, hogy általános iskolában kizárólag gravitációs erőt és gravitációs gyorsulást használjunk, a Földet közelítsük homogén gömbnek, amely nem forog. A gravitációs gyorsulás értékének a $9{,}8\ m/s^2$-et javaslom, azonban feladatmegoldásoknál érdemes a $10\ m/s^2$ közelítést alkalmazni a matematikai könnyebbség miatt.

A gimnáziumokban viszont a diákok már rendelkeznek olyan matematikai és fizikai ismeretekkel (továbbá számológépet is használhatnak), hogy a $10\ m/s^2$ használata célját veszti, így a pontosabb számolások érdekében a $9{,}8\ m/s^2$ értéket tartom helytállónak, mert az a Föld minden pontján, a centrifugális erőtől, a Föld lapultságától, a Coriolis-erőtől, a Föld inhomogén tömegeloszlásától és az árapály jelenség hatásától függetlenül igaz. Úgy gondolom, hogy a nehézségi erő és nehézségi gyorsulás fogalmát is érdemes megemlíteni a tankönyvekben, s ha a pontosságot hangsúlyozni szeretnénk, akkor Magyarországon a $g = 9{,}81\ m/s^2$ közelítés helyes.

Érdemes megemlíteni, hogy a 80-as években íródott klasszikus Dede – Isza tankönyv is hasonlóan tárgyalja a fogalmakat. Az $m\boldsymbol{g}$-t gravitációs erőnek hívja, a későbbiekben pedig a tehetetlenségi erők ismeretében adja a diák tudtára, hogy a Föld inerciarendszernek tekintésével mekkora hibát követtünk el:

„Most pedig ideje visszaemlékeznünk arra, ami fölött eddig szemet hunytunk: a földön nyugvó testek $\boldsymbol{a_v} = -\omega_F^2\boldsymbol{r}$ (centripetális) gyorsulással „zuhannak" az É-D tengely felé, így nem jelölhetnek ki inerciarendszert. Igaz, ez a gyorsulás nagyon kicsi a gravitációs térerősséghez képest (Budapesté mindössze $0{,}02\ m/s^2$ nagyságú). Nemcsak ezért volt azonban „bocsánatos bűn" az elhallgatása, hanem még inkább azért, mert a szabadon eső test esési idejéből valójában nem is a tiszta gravitációs térerősséget határoztuk meg ($\boldsymbol{g_0}$-t), hanem annak egy $\omega_F^2\boldsymbol{r}$ „ál-gravitációs térerősséggel" módosított értékét, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g_0} + \omega_F^2\boldsymbol{r}$-et. És éppen az ezzel számolt $m\boldsymbol{g}$ súlyerő alkalmas a földhöz viszonyított mozgások elemzésére!" [34]

Természetesen a tankönyv ma már nem használható középiskolás tanításra, főként a hasonló mélységű fogalmak használata miatt. Ha azonban ezektől eltekintünk, kifinomult ötleteket vehetünk át a régebbi tankönyvekből. Javasolt gondolatomban megerősít egy angol tankönyv is [35], ahol a bizonyos gyorsulásra több kifejezést is használ a szerző. Az *„acceleration due to gravity*" akkor kerül elő, ha a gravitációs erő miatt fellépő gyorsulásra utalunk, mely a Földön felszín közelében $9{,}8\ m/s^2$, a Holdon pedig $1{,}6\ m/s^2$. Használja még az *„acceleration of free fall"* kifejezést is, ha az objektum a Föld felszínéhez közel található, számszerűsítve értékét $9{,}8\ m/s^2$-tel. Mivel az angol szakirodalom nem használ külön kifejezést a nehézségi gyorsulásra, ezért nekik nagyobb fokú szabadságuk van, megtehetik, hogy nem különböztetik meg a fogalmakat.

Személyes tapasztalatom, hogy a gravitációs erő és nehézségi erő összemosódása gátolt első féléves mechanika tanulmányaimban. Erős emlékeim voltak arról, mikor gimnáziumban azonosítottuk a nehézségi gyorsulást a gravitációs erőből adódóval. A dolgozat megírását az is ösztönözte, hogy mikor több hallgatótársaimmal és középiskolás tanár ismerőseimmel beszéltem, meglepődve tapasztaltam, hogy ezeket nem gondolták végig. Például egyik megkérdezett ismerősöm *sem* tudta, hogy a nehézségi erőnek nem feltétlen van ellenereje. Évtizedes gyakorlattal rendelkező elismert tanár egy előadás során mondott ki két egymásnak ellentmondó állítást: a nehézségi erő és gravitációs erő különböznek (mert a Föld forog), viszont feladatmegoldásnál már megkérdezte a nehézségi erő ellenerejét, melyre a „helyes" válasz a „*Föld középpontjából test felé mutató erő*" volt.

A dolgozat megalkotásában szerepet játszott, hogy tanítási tapasztalatom során gyakran problémába ütköztem, vajon az mg-t minek nevezzem? A nehézségek miatt az órákon én szinonimaként használtam az mg megnevezésére a nehézségi erőt és gravitációs erőt. A problémát az adta, hogy az összes tankönyv említi a nehézségi erőt, ezért ennek a szónak a használata nem elkerülhető. A fogalmak szétválasztására a tehetetlenségi erők megemlítésénél fogok csak kitérni. Értékét pedig egyszerűbb esetekben $10\ m/s^2$-re, pontosabb számításoknál $9{,}8\ m/s^2$-re kerekítettem. Utóbbinál a diákoknak kifejtettem, hogy a Föld minden pontján használhatjuk ezt az értéket magasságtól függetlenül. Az azóta kijavított dolgozatokban mindig a $9{,}8\ m/s^2$ érték köszönt vissza.

Úgy gondolom dolgozatommal egy egyszerű, de kevés fizikatanár által ismert módszertani problémára hívhatom fel a figyelmet, így a jövőben saját belátásuk szerint mérlegelhetnek a kérdésekben, hiszen egy tanárnak mindig tisztában kell lennie azzal, hogy hol, mit és miért nem említ tanítása során. Dolgozatom ezért Arisztotelész bölcs gondolatával zárom:

„A tanult embert az jellemzi ugyanis, hogy minden kérdésben csak olyan fokú szabadságot kíván, amekkorát az illető tárgy természete megenged." [36]

5. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani *Herein Mátyás*nak a korszerű geofizikai adatok megadásáért és azért, hogy a *3. ábrán* látható gyönyörű térképre is felhívta a figyelmem. Ezenfelül köszönettel tartozom *Tasnádi Péternek és Tél Tamásnak* az évtizedes tapasztalataik megosztásáért.

6. FÜGGELÉK

6.1 A súlyerő

A súlyerő és súlytalanság szintén olyan fogalmak a közoktatásban, melyek tárgyalása módszertani meggondolásokat igényel. A probléma feltárása érdekében néhány tankönyvi idézetet mutatok be.

„Súlynak vagy súlyerőnek a test által az alátámasztási felületre, illetve a felfüggesztési pontra kifejtett erőt nevezzük.” „Súlytalanságnak azt az állapotot nevezzük, amikor a test nem nyomja az alátámasztást vagy nem húzza a felfüggesztést.” [37]

„A test súlya az az erő, amellyel a test – a gravitációs vonzás miatt – nyomja az alátámasztás vagy húzza a felfüggesztést.” „A szabadon eső testeknek nincs súlya, mert nincsenek sem alátámasztva, sem felfüggesztve. A szabadon eső testekről ezért azt mondjuk, hogy súlytalansági állapotban vannak.” [38]

Az az erő, amely a gravitációs vonzás (és a Föld forgása) miatt húzza a felfüggesztést vagy nyomja a vízszintes alátámasztást a test súlya.” „Egy gravitációs mezőben levő rendszer akkor van súlytalansági állapotban, ha nincs alátámasztva vagy felfüggesztve, hiszen akkor nem fejt ki súlyt semmire.” [39]

„Azt az erőt, amellyel a nyugalomban lévő test az alátámasztást nyomja, illetve amellyel a függőleges felfüggesztést húzza, súlynak vagy súlyerőnek nevezzük.”

„a súlytalansági állapot nem más, mint a testek szabadesése, vagyis egy g nehézségi gyorsulással történő gyorsulás a Föld középpontja felé”. „A súlytalanság állapotában a testre a nehézségi erőn kívül semmilyen más erő nem hat. Ez azt is jelenti, hogy a test nem nyomja az alátámasztási felületet, és nem húzza a felfüggesztést.” [40]

A fenti definíciók szerint tehát egy lejtőn a test súlya más, mint vízszintes talajon, hiszen a lejtőre ható nyomóerő a felületre merőleges $mgcos\alpha$, ahol α a lejtő dőlési szöge. Előnye viszont az, hogy egyszerűen megragadja a fogalmat, s könnyen érthető. Azonban a lejtő kérdésköre diákjainkban is felmerülhet.

Egy bevezető egyetemi tankönyv azért, hogy a lejtővel kapcsolatos problémát orvosolja, így fogalmaz:

„a test súlyán azt az erőt értjük, amellyel a test a vízszintes alátámasztást nyomja, illetve amellyel a függőleges felfüggesztést húzza. […] Ennek megfelelően súlytalanságról akkor beszélünk, amikor az előbb definiált súly nullával egyenlő: A testnek nincs súlya, tehát súlytalan.” [41]

Ennek tiszta megfogalmazása úgy gondolom helytálló és közérthető is. Azonban hátránya a fentiekkel együtt, hogy a súly nem a testre hat, hanem az alátámasztásra vagy felfüggesztésre. Azonban mi szeretjük a súly fogalmát a tárgyakra vonatkoztatni. Ezért fogalmaz egy *régebbi* egyetemi tankönyv az alábbi módon:

„A légüres térben eső vagy elhajított test a g nehézségi gyorsulással mozog, tehát a második axióma szerint az m tömegű testre a függőlegesen lefelé irányuló, mg nagyságú erő hat, amelyet a Föld által a testre gyakorolt nehézségi erőnek vagy súlynak – a test súlyának -, néha súlyerőnek is nevezünk." [42]

„Az űrhajó az inerciarendszerhez képest $\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ *gyorsulással mozgó rendszernek tekinthető, s így egy benne levő m tömegű testre az 51.§ szerint hat az* $\boldsymbol{F_t} = -m\boldsymbol{a} = m\frac{v^2}{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ *tehetetlenségi erő is, ez az erő pedig a test súlyát* $\left(\boldsymbol{G} = -\frac{\gamma M m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} - et\right)$ *éppen kompenzálja:* $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F_t} = 0$, *mert (1) szerint* $v^2/r = \gamma M/r^2$*."* [43]

Ez a fogalmi tárgyalás nem csak, hogy feleslegesen bonyolult, a súly és súlytalanság fogalmai közötti párhuzamot is elfedi. Ezzel szemben előnye, hogy a súlyt egyszerűen számolhatóvá és szemléletessé teszi. Összességében ezt a definíciót nem tartom használhatónak középiskolában.

A fenti [42] és [43] példa azért is izgalmas, mert kiválóan megmutatja, hogy egyes régi tankönyvek merőben eltérő módon fogalmazták meg a súlyerőt. A 60-as évek elején 4 különböző definícióval is találkozhattak diákjaink. Ennek tisztázására írt cikket Párkányi László [44], melyben azt is megemlíti, hogy az 1967-es Országos Fizikatanári Ankéton egyik központi témája a súly és súlytalanság fogalma volt. Így az „alátámasztásra, illetve felfüggesztésre ható erő" megfogalmazás győzedelmeskedett. A cikk alaposan körbejárja ennek módszertani előnyeit, s a fizikatanár olvasókat buzdítom ennek elolvasására, mellyel történelmi távlatban is megértheti a használt fogalmat.

A súlyfogalmat érdemes Arkhimédész-törvényéhez is igazítanunk. Az erre vonatkozó közismert mondóka a következő: *"Minden vízbe mártott test a súlyából annyit veszt, amennyi az általa kiszorított víz súlya".* Ez a szabály nem egyeztethető össze a nehézségi erőnek vett súlyfogalommal, hiszen egy szabadon eső, vízbe mártott testre nem hat felhajtóerő. Továbbá, ha azt az esetet is vizsgáljuk, hogy mi történik, ha egy lejtőre helyezett pohár vízbe mártom a testet, akkor ismételten a [41] definíció fogalmaz a legtisztábban. A súly problémaköre tovább csavarható, ha olyan eseteket is vizsgálunk, amikor a felfüggesztésre és az alátámasztásra egyszerre hat erő (például egy rugón, földig lelógó test).

A fenti gondolatokból szívem szerint azt a következtetést vonnám, hogy a súly fogalmát a közoktatásból hagyjuk el, melyre példa is van [45]. Egy egyetemi jegyzet így szól: *„a fizika fogalomrendszerébe még a nehézségi erőt sem kellene szükségszerűen bevezetni, a súly fogalmára pedig semmi szükség!”* [46].

Számos eset hozható, amely ellentmond a kimondott definícióknak. Ezenfelül a súlyerő szó használata teljes mértékben nélkülözhető, hiszen a mérlegre kifejtett súlyerőt nevezhetjük mérlegre kifejtett nyomóerőnek. Tanítási tapasztalatom is ezt sugallja, ugyanis a diákoknak nagyon sok logikai lépést kellett átlátniuk. Első körben felírjuk a testre ható erőket, majd kiszámoljuk a testre ható nyomóerőt, amely az alátámasztásra (felfüggesztésre) ható erőnek az ellenereje, azaz a test súlyának ellenereje. Így a testre ható nyomóerő nagyságával egyenlő a test súlya. Ezek a gondolatok a dinamika tárgyalásának legelején kerülnek elő, ahol még az erők felírása és a Newton-törvények megfelelő alkalmazása is kihívás. Viszont, ha sikerrel járunk és diákjaink megértik a lépéseket, akkor sokat tanulhatnak a dinamikai problémák megoldásáról.

Továbbá, ha figyelembe veszem, hogy egy évtizedes hagyománnyal és évszázados szóhasználattal bíró fogalomról van szó, amelyen fizikusok és fizikatanárok ezrei nőttek fel, továbbá a súlytalanság megértése sem elkerülhető tényező, akkor a [41] tankönyvben megadott definíciót tartom a legjobbnak, mely a lejtő esetét kizárja. Ezzel diákjainkban előrevetíti azt is, hogy a lejtőn a nyomóerő nagysága más, mint vízszintes talajon. A tankönyvírók is ezen gondolatok fejében hozhatták meg a döntést a definíció kérdéskörében.

7. IRODALOMJEGYZÉK

[1.] Tóth Eszter, Holics László, Marx György, *Atomközelben*. Gondolat Kiadó, 1981.

[2.] Woynarovich Ferenc, *Milyen tantárgy a fizika*, Fizikai Szemle, 2012/04, 129-130.o.

[3.] Woynarovich Ferenc, *Gondolatok a »modell« fogalom használatáról,* Fizikai Szemle, 2014/03, 103-106.o.

[4.] Csákány Antal, Flórik György, Gnädig Péter, Holics László, Juhász András, Sükösd Csaba, Tasnádi Péter, *Fizika*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2009, 29.o.

[5.] Nagy Károly, *Elméleti mechanika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 27.o.

[6.] Csajági Sándor, Fülöp Ferenc, *Fizika 9-10. Emelt szintű képzéshez*, OFI, Eger, 2019. 34.o.

[7.] Csajági Sándor, Fülöp Ferenc, *Fizika 9-10. Emelt szintű képzéshez*, OFI, Eger, 2019. 85.o.

[8.] Nagy Károly, *Elméleti mechanika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 28.

[9.] Standish, E.M. *Report of the IAU WGAS Sub-Group on Numerical Standards,* in Highlights of Astronomy (I. Appenzeller, ed.), Table 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1995.

[10.] Pitjeva, E.V. & Standish, E.M. *Celest Mech Dyn Astr* 2009. 103:365.

[11.] Moritz, H. Bulletin *Geodesique* 1992. 66:187

[12.] Hortobágyi István, Rajkovits Zsuzsanna, Wajand Judit, *Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések. Négyjegyű függvénytáblázatok*, Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2005. 109-110.

[13.] Hack Frigyes, Fülöp Ferenc, Radnai Gyula, Urbán János, Szabados László, Nemerkényi Antal, Balázs Loránt, Büki András, *Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004. 124-125.

[14.] Tasnádi Péter, Skrapits Lajos, Bérces György, *Mechanika I*. Dóm Kiadó, Budapest, 2013.

[15.] Budó Ágoston, *Kísérleti Fizika I*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[16.] http://www.geofizika.uni-miskolc.hu/Oktatok/vass/Geof01_gravi.pdf (Utolsó letöltés 2019.12.12.)

[17.] http://glu.elte.hu/~gyorgyi/teaching/Elmeleti_Mechanika/jegyzet/emjegyzet.pdf (Utolsó letöltés 2019.12.12.)

[18.] Meskó Attila, *Eötvös Loránd geofizikai vizsgálatai*, Természetvilága 2006/01. 12-17.

[19.] Eötvös, Roland *Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage*, E. J. Brill, Leiden 1907.

[20.] Kiss, János *Regionális gravitációs anomáliák, izosztatikus hatások Magyarországon*, Magyar Geofizika, 2009. 50 (4). pp. 153-171.

[21.] Dégen Csaba, Kartaly István, Sztanó Péterné, Urbán János, *Fizika 7*. OFI, Eger, 2018. 28.o.

[22.] Dégen Csaba, Kartaly István, Sztanó Péterné, Urbán János, *Fizika 7*. OFI, Eger, 2018. 30.o.

[23.] Sztanó Péterné, Tóthné Szalontay Anna, *Tanári Kézikönyv*. OFI, Eger, 2018. 50.o.

[24.] Halász Tibor, *Fizika 9. Mozgások, Energiaváltozások,* Mozaik Kiadó, Szeged, 2010. 32.o.

[25.] Halász Tibor, *Fizika 9. Mozgások, Energiaváltozások*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010. 94.o.

[26.] Halász Tibor, *Fizika 9. Mozgások, Energiaváltozások*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010. 84.o.

[27.] Halász Tibor, *Fizika 9. Mozgások, Energiaváltozások*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010. 153.o.

[28.] Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Tomcsányi Péter, Varga Antal, *Fizika I*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2015. 26.o.

[29.] Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Tomcsányi Péter, Varga Antal, *Fizika I*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2015. 50.o.

[30.] https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (Utolsó letöltés 2019.12.12.)

[31.] Moór Ágnes, *Középiskolai fizikapéldatár*, Cser Kiadó, Budapest, 2012. 22.o.

[32.] Moór Ágnes, *Középiskolai fizikapéldatár*, Cser Kiadó, Budapest, 2012. 23.o.

[33.] Csajági Sándor, Fülöp Ferenc, *Fizika 9-10. Emelt szintű képzéshez*, OFI, Eger, 2019. 202.o.

[34.] Dede Miklós, Isza Sándor, *Fizika II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. 119-120.o.

[35.] Jim Breithaupt, *AQA Physics. A Level Year 1. Student Book*, Oxford University Press, United Kingdom, 2015.

[36.] Arisztotelész, *Nikomakhoszi etika*, 2. kiadás, ford.: Szabó Miklós, Európa Kiadó, Budapest, 1987. 7.o.

[37.] Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Tomcsányi Péter, Varga Antal, *Fizika I*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2015. 51-52.o.

[38.] Bonifert Domonkosné, Halász Tibor, Kövesdi Katalin, Miskolczi Józsefné, Molnár Györgyné, Sós Katalin, *Fizika 7. Mechanika, Hőtan,* Mozaik Kiadó, Szeged, 2018. 55-56.o.

[39.] Halász Tibor, Jurisits József, Szűcs József, *Fizika 11-12. Érettségire készülőknek,* Mozaik Kiadó, Szeged, 2015. 50.o.

[40.] Csajági Sándor, Fülöp Ferenc, *Fizika 9-10. Emelt szintű képzéshez,* OFI, Eger, 2019. 108.o.

[41.] Tasnádi Péter, Skrapits Lajos, Bérces György, *Mechanika I.* Dóm Kiadó, Budapest, 2013. 217.o.

[42.] Budó Ágoston, *Kísérleti Fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. 60.o.

[43.] Budó Ágoston, *Kísérleti Fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. 205.o.

[44.] Párkányi László, *A súly és súlytalanság,* Fizikai Szemle, Budapest, 1967/1. 50-59.o.

[45.] Halász Tibor, *Fizika 9. Mozgások, Energiaváltozások,* Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[46.] Juhász András, Tasnádi Péter, Jenei Péter, Illy Judit, Wiener Csilla, Főzy István, *A fizika tanítása középiskolában I.* Egyetemi jegyzet. ELTE, 2005.