

Féléves Doktori Beszámoló, 2022/23/1

Jánosi Dániel (daniel.janosi@ttk.elte.hu)

Statisztikus Fizika, Biológiai Fizika és Kvantumrendszerek Fizikája Program

Témavezető: *Károlyi György*, egyetemi tanár, BME NTI

Dolgozat: Időfüggő paraméterű kaotikus rendszerek elmélete és alkalmazásai

1. Bevezetés

A kutatásaim a káoszelmélet egy még részben felfedezetlen területén, az időfüggő paraméterű kaotikus rendszerek elméletében elért új eredményekre támaszkodik. Az ilyen rendszerek esetén a káoszelmélet hagyományos eszközei, mint a periodikus pályasorfejtés vagy a Lyapunov-exponensek klasszikus definíciója nem alkalmazható, továbbá egyetlen trajektória követése már nem ad megbízható leírást a rendszerről. Ez mind az időben gyorsan változó paraméter (drift) következménye. Ezeknek a problémáknak a megértéséhez tehát új módszerekre volt szükség.

A legjobb ilyen általános módszernek a több trajektória együttes követése, ún. trajektóriasokaságok követése bizonyult. Néhány évtizede már ismert, hogy ennek segítségével, a kezdeti sokaságnak tetszőleges alakot véve, gerjesztett disszipatív rendszerek esetén meghatározható a fázistér domináns objektuma, az ún. snapshot attraktor [1–3], egy időfüggő kaotikus halmaz, amihez az összes trajektória konvergál. Ugyanakkor viszont az ugyanilyen típusú konzervatív rendszerek problémáját csak néhány éve kezdték felderíteni, sikeresen leírva az ezeket meghatározó jelenségeket [4, 5]. Itt a kezdeti sokaság alakja nem tetszőleges, hanem az időfüggetlen eset KAM tóruszait vagy kaotikus tartományait kell használni, és ezek paraméterdrift alatti időfejlődése határozza meg a rendszer dinamikáját. Hasonlóan nem régen alkották meg a gerjesztetlen disszipatív rendszerek ilyen típusú leírását [6], ahol a disszipációmentes rendszer KAM tóruszai alkalmazhatóak kezdeti sokaságként. Az ilyen rendszerek káoszáat duplán tranziens káosznak szokás nevezni, mivel idővel a kaotikus mozgás megszűnik (tehát tranziens), azonban a tranziensek mértéke is változik időben [7]. Kidolgozásra került továbbá az ún. sokaságátlagolt páronkénti távolság (EAPD) módszer, amellyel az időfüggő káosz dinamikai instabilitása mérhető, tulajdonképpen a Lyapunov-exponens koncepciójának általánosítása fázistérbeli pontpárok távolságának vizsgálatával és sokaságátlagok számolásával [4, 8, 9]. A legújabb eredmény ezen a területen a trajektóriasokaságok módszerének egy átfogó leírása és a klímatudománnyal való közvetlen kapcsolatba hozatala [8], valamint az időfüggő paraméterű kaotikus rendszerek általános, alapvető leírása stabil és instabil foliációkon keresztül [9].

2. A doktori képzésen belül ebben a félévben megvalósult kutatómunka

2.1. Kaotikus transzport plazmafizikai alkalmazása

A doktori képzés keretében végzett kutatásaim a fenti eredmények elméleti továbbfejlesztéséből, valamint alkalmazási lehetőségeinek közvetlen feltárásából állnak. Az egyik ilyen széles alkalmazási terület a plazmafizika, ahol a fúziós berendezések mágneses erővonalai és az azokat követő részecskék alacsony dimenziós konzervatív kaotikus rendszerekkel modellezhetők. Ebben a témában indítottunk egy kutatási projektet Károlyi Györggyel, Pokol Gergővel (BME NTI) és Papp Gergellyel (Max Planck Institute for Plasma Physics,

Garching & Greifswald, Németország), melyben a fúziós plazmák transzportjának káoszelméleti megalapozását tűztük ki célul. A jelenlegi transzportmodell [10] a részecskeszám tisztán exponenciális lecsengését, tehát kizárólag kaotikus transzportot feltételez, elhanyagolva a konzervatív kaotikus rendszerek fázissterében, és így a fúziós plazmák konfigurációs terében is előforduló elliptikus szigeteket, és az ezek körül található nemhiperbolikus, ún. ragacsos zónákat, amelyekből a kiszökés rátája hatványfüggvény-szerű, így hosszú időre becsapdázhathatnak kaotikus részecskéket. Kutatásunk célja egy olyan transzportmodell kialakítása, amely figyelembe veszi a hatványfüggvény-szerű viselkedést, ezáltal pontosabb elméleti leírást eredményezve. Ezután, felhasználva az időben változó paraméterű konzervatív kaotikus rendszerektől szerzett új eredményeket, célunk a modell továbbfejlesztése ebbe az irányba is.

Ebben a félévben a projekt első lépéseként Károlyi Györggyel előkészítő káoszelméleti háttér munkát végeztünk; kidolgoztunk egy, a két fajta transzportot egyszerre leíró függvényt. Ennek alakja, az N részecskeszám időbeli változása:

$$N(t) = Ae^{-\kappa t} + \frac{1 - A}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha}, \quad (1)$$

ahol A a kaotikus kezdőfeltételű részecskék aránya, κ az ún. szökési ráta, a kaotikus transzportra jellemző állandó, τ és α pedig a hatványfüggvény-szerű lecsengés időskálája és jellemző állandója. A modell érvényességét sikerrel teszteltük a káoszelmélet egyik legalapvetőbb rendszerén, az ún. Chirikov-féle standard leképezésen végzett szimulációkkal. A következő lépések ezután a modell alkalmazása fúziós plazmát leíró egyszerű kaotikus leképezésre illetve realiztikus plazma-szimulációk adataira, majd később a paraméter-változás bevezetése. Az irodalomban léteznek mind szimulációs, mind az (1) egyenlethez hasonló elméleti megközelítések, a kettő általános egyesítése azonban új eredmény, továbbá a modellt felhasználva a standard leképezés eddig fel nem fedezett tulajdonságaira is fény derülhet, így az eredmények káoszelméleti szempontból is jelentősek. A következő félév során külön publikációban tervezzük közölni ezeket az eredményeket. Ez a hosszútávú projekt adja a doktori programon belüli kutatómunkám, továbbá a későbbiekben a disszertáció magját, valamint amint lehetőségem nyílik rá, ezzel a témával tervezek pályázni a Kooperatív Doktori Program (KDP) ösztöndíjra is.

2.2. Az időfüggő paraméterű kaotikus rendszerek elméletének továbbfejlesztése

Kutatásaim egy másik fontos része a korábbi munkák folytatása, nevezetesen a [9] publikációban megfogalmazott elvek és módszerek továbbfejlesztése. Itt az időfüggő paraméterű kaotikus rendszerek alapvető szerkezetét írtuk le stabil és instabil foliációk segítségével. Ezek a fázisster olyan görbéi, amelyek érintői minden pontban a lokális stabil vagy instabil irányba mutatnak, és ahol a két fajta foliáció metszi egymást, ott kaotikus dinamika figyelhető meg. A Tél Tamással (ELTE TTK) közös kutatási projektben azon dolgozunk, hogy a foliációk elvét összhangba hozzuk a tranzien káosz, és ezáltal az időfüggő paraméterű káosz központi koncepciójával, a kaotikus nyereghalmazzal, továbbá hogy a korábbi munkáink [4, 8] során megfigyelt jelenségeket a foliációk nyelvén is megfogalmazzuk. Az eredmények publikálása itt is a következő félévben várható.

2.3. Alacsony dimenziós, időfüggő paraméterű kaotikus plazmamodell leírása

A korábbi káoszelméleti eredmények egy másik plazmafizikai alkalmazása egy alacsony dimenziós plazmamodell direkt vizsgálata. Az ilyen modellek a plazmafizikában használatos magnetohidrodinamikai elveket jelentős leegyszerűsítik, cserébe könnyű kezelhetőséget biztosítanak. Ezért, valamint mert egyszerűségük miatt gyakorlatilag alacsony dimenziós konzervatív kaotikus rendszerekként írhatók le, remek első közelítést biztosítanak az időfüggő paraméterű kaotikus konzervatív rendszerekben megfigyelt új jelenségek, elsősorban a kezdetben kváziperiodikus tóruszok felbomlása [4], valamint az EAPD módszer közvetlen plazmafizikai megfigyelésére és alkalmazására. Ehhez Kovács Tamással (ELTE TTK) és Édes Lilivel (ELTE TTK) a FIZ/5/053 kódú kurzus keretében elindított kutatási projektben a [11] cikkben vázolt leképezést használjuk, amely egy ergodikus limiterrel perturbált fúziós plazmát modellez. Itt az $\epsilon = I_l/I_p$ kontrollparaméter a limiter áramának és a plazmaáramnak a hányadosa. Ezt időben nem elhanyagolható módon változtatva az előzetes eredmények alapján kiválóan megfigyelhetők a [4]-ben leírt jelenségek, illetve alkalmazható az EAPD módszer a rendszer időfüggő Lyapunov-exponensének számolására.

2.4. A EAPD módszer alkalmazása klímamodellben

Egy másik széles alkalmazási terület a klímadinamika, ahol a sokaság módszer és disszipatív kaotikus fázis-térben kialakuló snapshot attraktor a vizsgálati módszerek szerves részét képezik [3,8]. A korábban egyszerű rendszereken kidolgozott új káoszelméleti módszerek közül az EAPD mennyiség és a belőle számolt pillanatnyi Lyapunov exponens magas dimenziós klímamodellekben is alkalmazható lehet. Ennek az előkészítését végezzük Tél Tamással és Herein Mátyással (ELTE TTK) a PlaSim nevű, egyszerűbb klímamodell segítségével. Mivel a rendszer snapshot attraktora erősen kaotikus, az itt vizsgált pontpárok távolsága nagyon hamar, körülbelül 30 nap alatt eléri a maximális értékét (a snapshot attraktor kiterjedését), ezért pillanatnyi Lyapunov-exponens csak erre a rövid időintervallumra számolható, szemben a modell 100 éves (1920-2020) időskálájával. Ezért terveink szerint a pillanatnyi Lyapunov-exponens mérését minden 10. évben fogjuk elvégezni, majd megvizsgáljuk, hogy a kapott értékeket mennyiben befolyásolja a (nagyjából a 60-as évektől tapasztalható) klímaváltozás. Az ezzel kapcsolatos eredményeket szintén a következő félév során tervezzük publikálni.

3. Egyéb kutatómunka

3.1. Maradék-gáz-elektronok hatása alacsony energiájú ionnyalábra

A doktori képzésen kívüli kutatómunkát végzek az Energiatudományi Kutatóközpontban Zoletnik Sándor felügyelete alatt, ahol egy alacsony energiájú ($\sim 1\text{eV}$) ionnyaláb elektronok által történő semlegesítődését szimulálok. A nyaláb vákuumban halad, amely azonban nem tökéletes, így előfordul benne bizonyos mennyiségű maradék-gáz. Ebből a maradék-gázból a nyaláb elektronokat szakíthat ki, amelyek befogódnak a nyaláb elektromos terébe és semlegesítik azt. A megfigyelések szerint ez a nyaláb szélének elkenődésében és semlegesítődésében, egy ún. elektron halo kialakulásában nyilvánul meg. Ezt a vizsgálatot elsősorban plazma-nyalábdiaosztikai mérések és az ezek során végzett megfigyelések motiválták, azonban az eredmények általános érvényűek lehetnek, és bármilyen nyalábdinamikai alkalmazásban felhasználhatóak lesznek majd. Az alapvető tudományos kutatási motiváció mellett ennek a munkámnak a célja, hogy kutatóintézeti kapcsolatot biztosítson a 2.1 fejezetben említett KDP ösztöndíjhoz.

4. Publikáció

Ebben a félévben nem jelentek meg publikációim és jelenleg nincs egy munkám sem bírálat alatt. Ugyanakkor a 2.1, 2.2 és 2.3 fejezetekben leírt kutatómunkák eredményei mind nagyon közel állnak a publikálható állapothoz, így erre várhatóan a következő félév során sor kerülhet.

5. Konferencia részvétel

A félév során a következő konferenciákon vettem részt:

- **Statisztikus Fizikai Nap**
Helyszín: MTA
Részvétel: Előadó
Előadás címe: A káosz alapszerkezetének vizsgálata erősen időfüggő paraméterű rendszerekben
Leírás: Az előadásomban a [9] publikáció legfontosabb eredményeit mutattam be.
- **Alkalmazott Matematikai Napok**
Helyszín: BME
Részvétel: Hallgató

6. Tanulmányok

A 2022/23/1 félévben hallgatott tárgyaim:

- **Fejezetek a modern égi mechanikából (FIZ/5/053)**

Oktató: Kovács Tamás

Érdemjegy: Jeles (5)

Leírás: A szeminárium-szerű tárgy keretén belül a hallgatók maguknak hozott, vagy az oktató által biztosított egyszerűbb kutatási témákon dolgoznak azzal a céllal, hogy a félév végére eldőljön, hogy érdemes-e további vizsgálatokat végezni a témában, esetleg a publikáció felé közelíteni. Én az Édes Lili MSc-s hallgató által hozott témán dolgoztam, publikálható eredményeket elérve (lásd a 2.3 fejezetet).

7. Oktatás

A 2022/23/1 félévben oktatott tárgyaim:

- **Elméleti mechanika B/Elméleti mechanika G, gyakorlat (elmfiz1bf19va/elmfiz1gf17ga)**

Képzés: Osztatlan fizikatanár képzés, Földtudományi BSc

A kurzust felvett/teljesítő hallgatók száma: 30/26

Leírás: A mind tanárszakosoknak, mind földtudományis hallgatóknak kötelező Elméleti mechanika kurzus gyakorlatát tartottam meg ebben a félévben, az előadásokat Cynolter Gábor tartotta. A gyakorlaton az előadás anyagához kaocsolódo feladatokat oldottunk meg, amelyhez Kovács Tamás jegyzeteit és kidolgozott anyagát használtam. A számonkérés órai munka és két zárthelyi dolgozat formájában történt.

- **Haladó káoszelmélet (sphalkaos22ea)**

Képzés: Fizika BSc, Fizikus MSc

A kurzust felvett/teljesítő hallgatók száma: 13/13

Leírás: Az előző félévben elindított Elemi káoszelmélet (spelkaoszf22ea) specim folytatását tartottam meg ebben a félévben. Az előadások anyagát, az előző félévhez hasonlóan, teljes egészében én dolgoztam ki, és Tél Tamás lektorálta. A számonkérés félév végi szóbeli vizsga formájában zajlott.

8. Ösztöndíjak, elismerések

A félév során az Új Nemzeti Kiválóság Program (ÚNKP) ÚNKP-22-3-I-ELTE-199 kódú ösztöndíjában részesültem. Az ehhez kapcsolódó kutatási tevékenységnek a 2.2 és 2.4 fejezetekben leírtak felelnek meg.

Hivatkozások

- [1] Yu, Ott and Chen, Phys. Rev. Lett. **65**, 2935 (1990)
- [2] Sommerer and Ott, Science **259**, 335 (1993)
- [3] Tél et. al., J. Stat. Phys. **179**, 1496 (2020)
- [4] Jánosi and Tél, Chaos **29**, 121105 (2019)
- [5] Jánosi and Tél, Chaos **31**, 033142 (2021)
- [6] Károlyi and Tél, J. Phys. Complex. **2**, 035001 (2021)
- [7] Motter et. al., Phys. Rev. Lett. **111**, 194101/1-5 (2013)
- [8] Jánosi, Károlyi and Tél, Nonlinear Dynamics **106**, 2781 (2021)
- [9] Jánosi and Tél, Phys. Rev. E **105**, L062202 (2022)
- [10] Rechester and Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **40**, 38 (1978)
- [11] Portela et. al., Int. Journal of Bif. and Chaos **17**, 5 (2007)