A bolygók körüli holdak számának meghatározásáról

Simon Tamás - Budapesti Német Iskola

Dálya Gergely, Dr. Hömöstrei Mihály – ELTE TTK

Kivonat

Cikkünk egy, a bolygók körül keringő holdak számát megadó lehetséges becslést mutat be. Ehhez a vizsgált bolygók néhány paraméterét kell használnunk, éppen annyit, hogy bizonyos exobolygókra is megfelelő közelítést tudjunk adni. A legfontosabb paraméter minden esetben a csillag és a bolygó tömegének aránya és a két égitest közötti átlagos távolság (illetve a bolygó pályájának fél nagytengelye). Az itt bemutatott modell kiindulási pontja mindig a bolygó körüli anyag tömege, majd a holdak tömeg szerinti eloszlása. Megmutatjuk, hogy a holdpályák eloszlásának köze van a bolygó tengely körüli forgásának periódusához, továbbá, hogy néhány exohold megfigyelésével még több paramétert nyerhetünk az exoholdak, illetve maga az exobolygó lakhatóságáról.

A Fizikai Szemlénél megjelenés alatt

1. Bevezetés

2018-as bejelentés szerint [1] megtalálták az első exoholdat, ám később kiderült, hogy az észlelt jelenséget valószínűleg nem egy hold okozta. Mivel tehát még nem ismerünk egyetlen exoholdat sem, érdekesnek tűnik az ötlet, hogy ezt a keresési folyamatot hogyan lehetne lehetne gyorsítani. Gondoljunk bele, hogy míg a 90-es években alig ismertünk exobolygókat, addig 2020-ban már több mint 4000-et tartunk számon. Valószínűleg hasonló lehet a helyzet az exoholdakkal, csak a méretük miatt a folyamat később indul el. Ezt a folyamatot azonban egy megfelelő „szűrővel" (amely kiszűri a holdak gazdabolygóit) felgyorsíthatjuk, majd az első néhány exohold felfedezése után még könnyebb lesz újakat találni.

2. Elmélet

2.1. Holdak

A holdak számának meghatározásánál az első lépés, hogy definiáljuk a hold fogalmát. A holdak olyan égitestek, amelyek egy bolygó körül keringenek. A cikkben csak a szabályos holdakkal foglalkozunk, amelyek a bolygóval együtt keletkeztek, és majdnem kör alakú pályájuk egy síkban helyezkedik el a többi holdéval. Emiatt a Föld és a Mars holdjai nem tekinthetők szabályos holdaknak, mert a Mars holdjai befogott aszteroidák, a Föld holdja pedig egészen érdekes módon keletkezett [2], ami semmiképpen sem az általános keletkezési mód. Modellünk szempontjából fontos megemlíteni, hogy a holdak számát csak egy bizonyos tömegérték fölött határozhatjuk meg, tehát definiálnunk kell egy olyan tömegértéket, amely alatt egy égitestet nem nevezünk holdnak. Ez azért fontos, mert ahogy egyre kisebb holdakat tekintünk, annál többet találunk belőlük, és nem akarunk több millió, néhány kilogrammos követ holdakként feljegyezni. Ezt a határt lehet variálni, de nem érdemes túl magasra állítani, mert akkor kevés holdra tesztelhetjük az elméletet, viszont túl alacsonyra sem érdemes, mivel rengeteg kis tömegű felfedezetlen hold van a Naprendszerben, és így nem kapnánk pontos eredményeket.

Így a minimális tömeget a következő értéknek választottuk:

$$m_{\min} = 10^{13} \text{ kg} \tag{1}$$

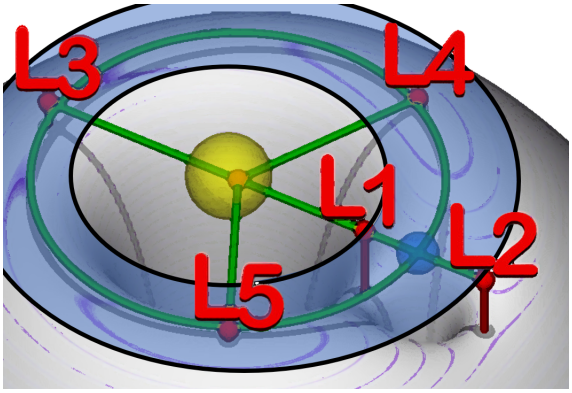
Ez a tömeg nagyjából akkora, mint a Szaturnusz Methone nevű holdjáé, ami a legkisebb pontosan ismert tömegű hold a Szaturnusz körül, és a Jupiter körül is hasonló a határ.

2.2. A modell alapjai

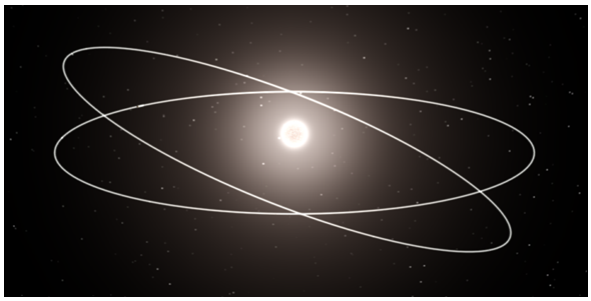
Most, hogy definiáltuk a holdak fogalmát, következő lépésként hasznos lenne a bolygó körül keringő anyagmennyiség tömegéből kiindulni, mivel a természetes holdak ebből alakultak ki. (Megjegyzés: vannak olyan holdak is, amelyek nem természetesek, tulajdonképpen „befogott" aszteroidák. Az ilyen holdakat ebben a cikkben nem tárgyaljuk.) Ahhoz, hogy megkapjuk, hogy egy csillagrendszerben mekkora az anyag tömegsűrűsége a csillagrendszer egy bizonyos pontján, a csillag keletkezését kell vizsgálni. Ezt a folyamatot a Nice-modell [3] írja le, miszerint a Naprendszer (és más csillagok bolygórendszerei) egy forgó gázkorongból alakultak ki, amiben nagyobb kődarabok „gravitációs porszívóként" működtek, és így a pályájukat kitakarították, amiből kialakultak a bolygók. Azonban nem az összes „felporszívózott anyag" lett a bolygó része, az anyagnak egy kis része pályára állt, és ezekből alakultak ki a holdak. A feladatunk tehát az, hogy összeszámoljuk, mennyi anyagról is van szó. Ehhez használnunk kell a gázkorong felületi sűrűségét. Ez azért hasznos, mert így nem kell a forgó gázkorongnak a korong síkjára merőleges struktúrájával foglalkoznunk, hanem elég csak síkban gondolkozni. Erre a felületi sűrűségre felírhatunk egy egyszerű relációt a távolság szerint [4]:

$$\sigma(r) \sim r^{-\frac{3}{2}} \tag{2}$$

ahol σ a felületi sűrűség, és r a csillagtól vett távolság. A számolások során használandó A felület az a körgyűrű-felület, amit a két Lagrange-pont (L_1 és L_2) fog közre egy keringési periódus alatt. A Lagrange-pontok távolsága pontosan megegyezik az úgynevezett Hill-szféra sugarával. Ez az a (nagyjából gömb alakú) terület egy bolygó körül, ahol a bolygó gravitációsan dominál, ezen kívül viszont a csillag dominánsabb. Az L_1 és L_2 Lagrange-pontok is éppen a Hill-szféra sugaránál helyezkednek el körpálya esetén, ami logikus, hiszen itt egyenlítődnek ki a csillagtól, és a bolygótól származó gravitációs erők. Ez a terület azért lesz fontos nekünk, mivel holdak csak itt alakulhatnak ki. Azért lehet ezt a területet használnunk, mert az ebben a bizonyos (korongként közelíthető) hengerben keringő anyag, egyszer biztosan érinti a Lagrange-pontok által közrefogott területet (1. ábra). (Egy egységnyi fél nagytengelyű objektum különböző inklinációkra valójában nem egy lapos henger alakú "területet" ad, hanem egy gömböt, de kis inklinációkra ezt tekinthetjük egy kellően lapos hengernek, mivel a tömeg jelentős része a síkban helyezkedik el.) A 2. ábrán láthatjuk a síkban keringő objektum és egy bizonyos inklinációjú objektum érintkezési pontjait.



1. ábra. A Lagrange-pontok által közrefogott terület, ahol a bolygó "porszívózik" [5]



2. ábra. Azonos sugarú körpályák találkozási pontjai.

Elliptikus pálya esetén egy idő után a precesszió miatt ugyanígy találkozni fog a síkban keringő objektum a másik objektummal. Ezek az állítások bizonyítják, hogy egy bolygó képes felszedni az összes anyagot, amely az általa meghatározott körgyűrűn kering. Ezért fontos, hogy a számításba vett bolygók már elég idősek legyenek ahhoz, hogy a számukra rendelkezésre álló tömeg nagyrészét felszedjék (tulajdonképpen ez maguknak a bolygóknak a definíciója), erre a Naprendszer tökéletes példa.

Ezt az A felületet a következő módon lehet meghatározni:

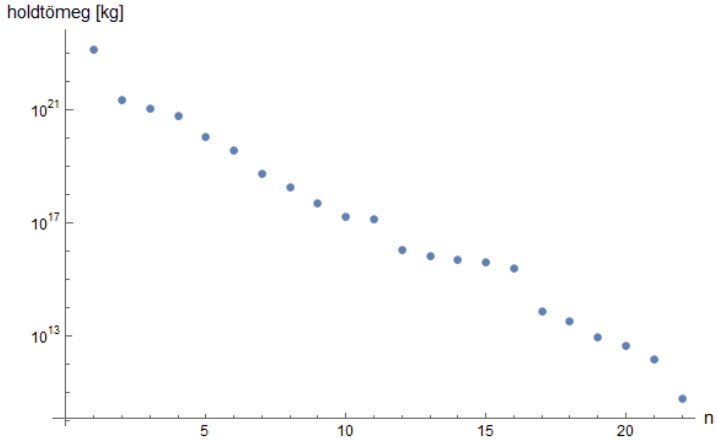
$$A = \pi \left((a + r_H)^2 - (a - r_H)^2 \right) = 4\pi a r_H \tag{3}$$

ahol a a bolygó fél nagytengelye, és $r_H \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$ a bolygó Hill-sugara. Ezt a területet még meg kell szorozni egy paraméterrel, amely azt jellemzi, hogy milyen könnyen tud egy bolygó anyagot maga köré akkretálni. Ez arányos lesz a bolygó tömegével és pályájának sugarával.

$$\sigma = \frac{\mu}{A} \Rightarrow \mu = c \cdot 4\pi r_H m \sqrt{a} \tag{4}$$

ahol μ a gyűrűn elhelyezkedő össztömeg, m a bolygó tömege és c az arányossági tényező a (3.) egyenlethez. Első közelítésben tekintsük c-t konstansnak.

Az eddigiek alapján kiszámíthatjuk egy bolygó körül keringő holdak össztömegét a bolygó tömegének ismeretében. Nehézség, hogy a holdak nem ismert tömegűek, így nem tudjuk megállapítani a számukat. Ennek áthidalására vizsgáljunk meg egy példát a holdak tömegének eloszlására a Szaturnusznál:



3. ábra. A Szaturnusz (nagy) holdjainak tömeg szerinti eloszlása logaritmikus skálán (a vízszintes tengelyen a holdak csökkenő tömeg szerint vannak sorrendbe állítva)

A 3. ábrán látható, hogy a holdak tömeg szerint nagyjából exponenciális eloszlást követnek, amely a függőleges tengely logaritmikus skálázása miatt lineárisnak látszik. Emögött az empirikus magyarázat a

következő: a holdak kialakulása hasonlóan modellezhető, mint egy bolygórendszer kialakulása. A nagyjából homogén gázkorongban a bolygó körül először kialakul egy kisebb csomó, ami a gázkorong egy bizonyos százalékát fel tudja szedni, és ez így folytatódik a többi kisebb csomóval is. Emiatt a természetes holdaknál arra számíthatunk, hogy az n-edik legnagyobb tömegű hold ugyanannyiszor nagyobb tömegű az n+1-ediknél minden n-re.
Definiáljunk tehát egy olyan függvényt, amely leírja a tömegeloszlást:

$$M(n) = de^{-bn} \tag{5}$$

ahol n egy adott hold csökkenő tömeg szerinti sorszáma, d és b pedig a bolygótól függő paraméterek. Tudjuk, hogy ha összeadjuk az összes hold tömegét, akkor megkapjuk a gyűrűn elhelyezkedő tömeget. Ezt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\sum_{n=1}^{N} M(n) = \mu \tag{6}$$

Mivel exponenciálisan változó tagokat összegzünk, ezért az összeg a következőképpen közelíthető, figyelembe véve, hogy a tömeg nagyon gyorsan tart nullához (és elméletileg végtelen számú "hold" kering az exponenciális-szabály miatt):

$$\sum_{n=1}^{N} M(n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \tag{7}$$

Ezt az összeget már egyszerű lesz kiszámolni, mivel egy mértani sor. Tehát:

$$\mu \approx \sum_{n=1}^{\infty} de^{-bn} = \frac{d}{e^b - 1} \quad \Rightarrow \quad d \approx c \cdot 4\pi r_H m\sqrt{a}\left(e^b - 1\right) \tag{8}$$

Megfigyelhetjük azt is, hogy ha $n = 0$, akkor $M(0) = d$, ebből következik, hogy

$$M(0) \approx c \cdot 4\pi r_H m\sqrt{a}\left(e^b - 1\right) \tag{9}$$

Kérdés, hogy van-e $M(0)$-nak fizikai jelentése. Tudjuk, hogy $M(1)$ a legnagyobb hold tömege, aminél feltételezzük, hogy arányos a bolygó tömegével. Ugyanez a helyzet a kisebb holdakkal is, csak azoknál kisebb az arányossági konstans. Ebből származik az, hogy $M(0)$ szintén arányos a bolygó tömegével, tehát $M(0) \sim m$. Legyen az univerzális arányossági állandó κ. Ezt falhasználva a (9.) egyenlet átírható:

$$\kappa \cdot m \approx c \cdot 4\pi r_H m\sqrt{a}\left(e^b - 1\right) \tag{10}$$

Ebből a b paraméter is meghatározható:

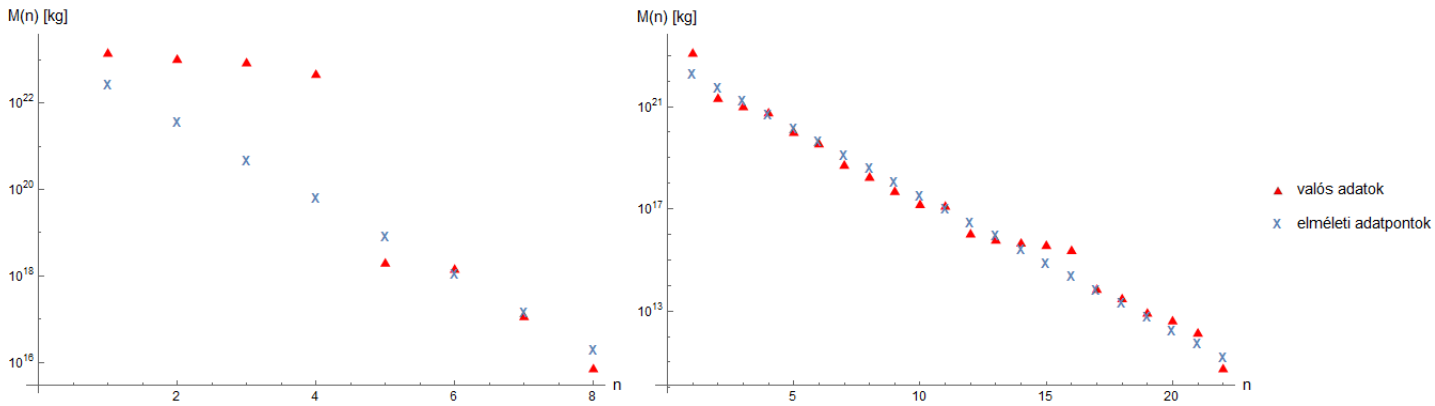
$$e^b - 1 = \frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} \quad \Rightarrow \quad b = \ln\left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1\right) \tag{11}$$

Végül meghatározhatjuk a tömegeloszlást leíró függvényt a következő módon:

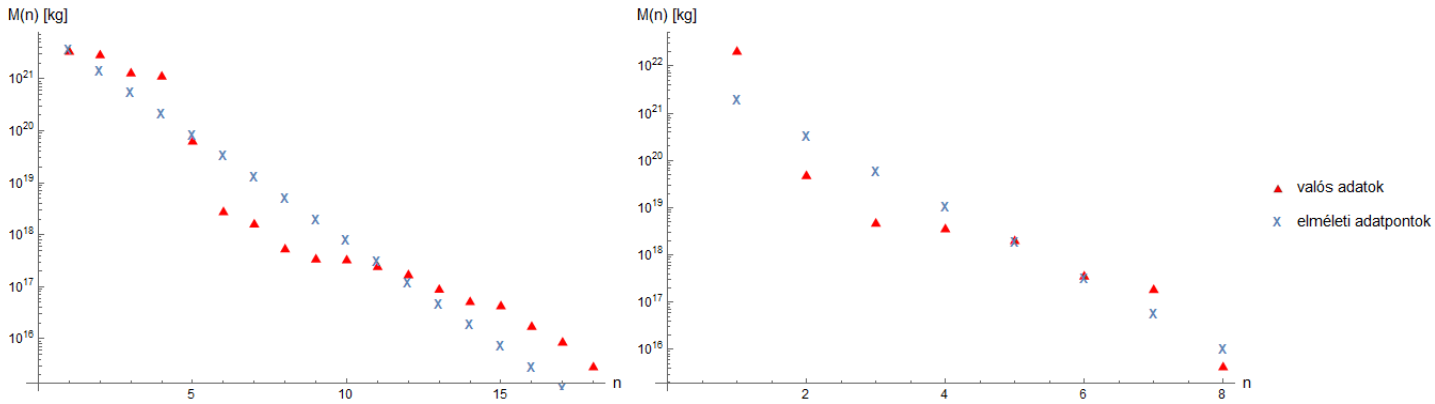
$$M(n) = \kappa m \cdot e^{-\ln\left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}}+1\right)n} = \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1\right)^{-n} \tag{12}$$

Itt a konstansokat mind meg lehet határozni a Naprendszer holdjainak ismert adataiból. A 4–5. ábra mutatja, hogy hogyan néz ki az eloszlás a Naprendszer gázbolygóinak holdjaira.

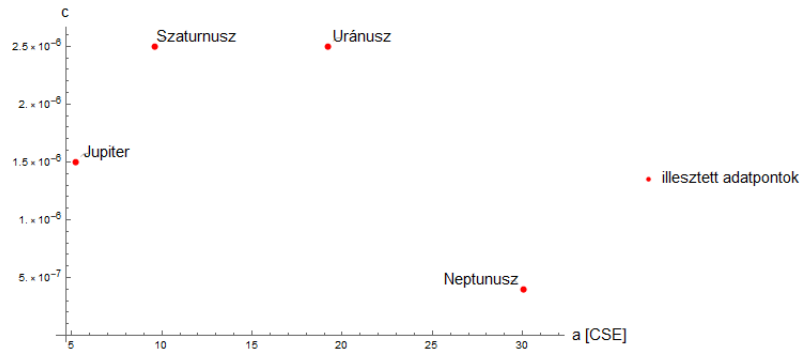
Igazolja az elméletünket, hogy a κ konstans tényleg minden bolygóra állandó, viszont a c konstans az Uránuszra és a Neptunuszra eltérő értéket ad (6. ábra). Lássuk, hogyan néz ki ez az eddig konstansnak gondolt paraméter a fél nagytengely függvényében.



4. ábra. Balra: A Jupiter szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$, és $c = 1.5 \cdot 10^{-6}$. Jobbra: A Szaturnusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$, és $c = 2.5 \cdot 10^{-6}$



5. ábra. Balra: Az Uránusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$, és $c = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$. Jobbra: A Neptunusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$, és $c = 4 \cdot 10^{-7}$



6. ábra. A c "konstans" (illesztésből származó adatpontok) a fél nagytengely függvényében a négy gázbolygóra kiszámítva

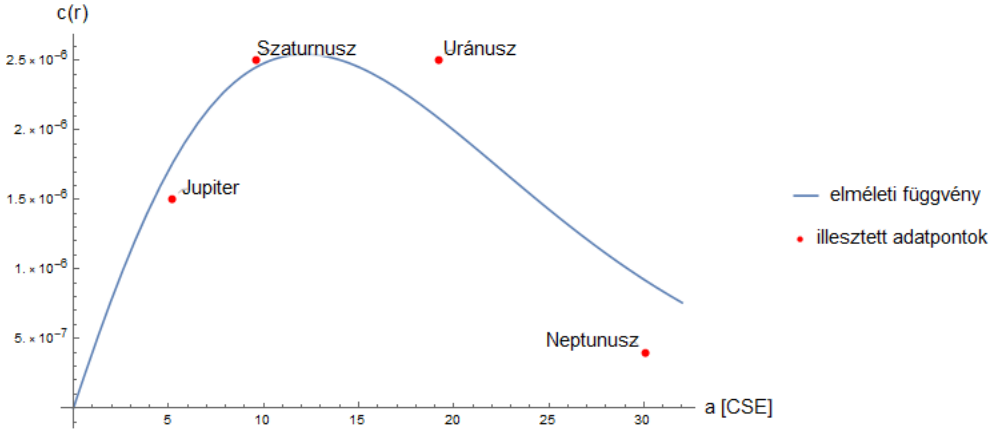
További kérdés, hogy miért nem állandó ez a paraméter? Azt írtuk, hogy a felületi sűrűség egy csillagrendszerben arányos $r^{-\frac{3}{2}}$-nel. Ez viszont csak bizonyos intervallumokban igaz, és túl közel vagy távol a csillagtól más lesz az eloszlás. Definiálhatunk egy pontosabb eloszlást [4] Sanford S. Davis munkája alapján, amely az egész rendszerben le tudja írni a felületi sűrűséget (a távolság CSE-ben értendő):

$$\sigma = \delta \, \frac{\exp\left(-\frac{2r^{3/2}}{27\pi\beta}\right)}{\sqrt{r}\beta^{4/3}} \tag{13}$$

ahol β a csillagrendszer korával arányos paraméter, és δ egy adott csillagra jellemző paraméter. Legyen mostantól c egy r-től függő paraméter:

$$c(r) = \delta r^{3/2} \, \frac{\exp\left(-\frac{2r^{3/2}}{27\pi\beta}\right)}{\sqrt{r}\beta^{4/3}} \tag{14}$$

Így mostantól elég kiszámolnunk a c paramétert egy bolygóra, és használhatjuk a korábbi tömegeloszlás-egyenletet. Nézzük most meg, hogy a 6 ábrán lévő c értékei mennyire hasonlítanak az előbb definiált $c(r)$ elméleti paraméterhez (7. ábra).



7. ábra. A $c(r)$ paraméter a fél nagytengely függvényében a négy gázbolygóra kiszámítva és az elméleti definícióval összehasonlítva

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a bolygók mind – megközelítőleg – körpályán keringenek, azaz a fél nagytengelyük egyenlő a pálya sugarával, ezért tudjuk a két értéket cserélgetni , a valóságban a kettő nem teljesen ugyanaz. Ezenkívül az eloszlás szépen követi a bolygókra illesztett adatpontokat. A két új bevezetett

1. táblázat. Naprendszerbeli bolygók szabályos holdjainak száma összehasonlítva a korábban bemutatott elmélettel

Valóság és elmélet összehasonlítása a holdak számára vonatkozóan		
bolygó	szabályos holdak száma	N
Merkúr	0	1.37 $\pm$0.05
Vénusz	0	2.09 $\pm$0.09
Föld	0	2.36 $\pm$0.11
Mars	0	2.15 $\pm$0.11
Jupiter	8	12.6 $\pm$2.1
Szaturnusz	22	18 $\pm$4
Uránusz	18	20 $\pm$4
Neptunusz	8	19 $\pm$4

érték $\delta = (6{,}5 \pm 2{,}55) \cdot 10^{-7}$, és $\beta = 1{,}5$, amelyek állandóak egy bizonyos csillagrendszerre. δ a csillagrendszer tömegétől és eredeti perdületétől függ, β pedig a csillag korától.

Végső soron meghatározhatjuk a bolygók körül keringő holdak számát azzal a trükkel, hogy tudjuk, hogy a legkisebb holdnak legalább m_{min} tömegűnek kell lennie, és ennek a holdnak a sorszáma pontosan egyenlő a holdak számával. Vagyis:

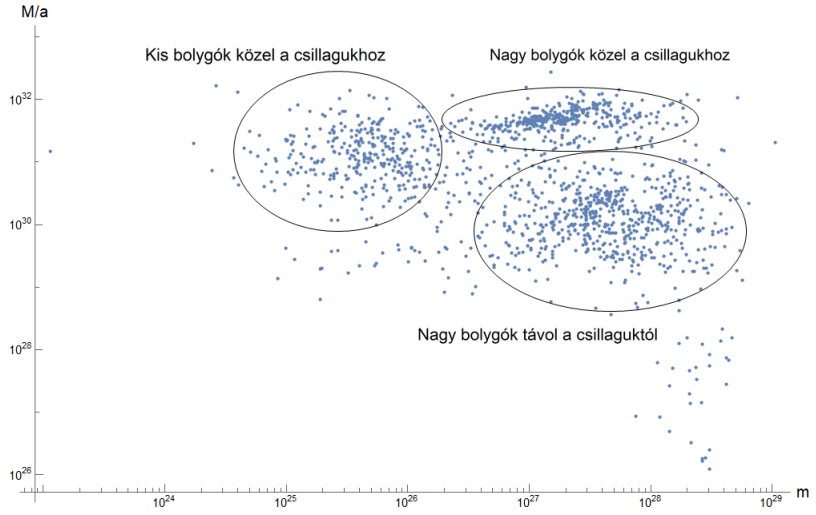
$$m_{min} = \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1 \right)^{-N} \Rightarrow \ln\left(\frac{m_{min}}{\kappa m}\right) = -N \ln\left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1 \right) \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad N = \ln\left(\frac{\kappa m}{m_{min}}\right) / \ln\left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1 \right) \tag{16}$$

Itt fontos az, hogy N-re nem kapnánk egész számot, ezért a korábbi érvelés alapján egészrészre kell kerekíteni a kapott értéket. Az 1. táblázat tartalmazza, hogy milyen adatokat kapunk a Naprendszer egyes bolygóira a modellünk alapján.

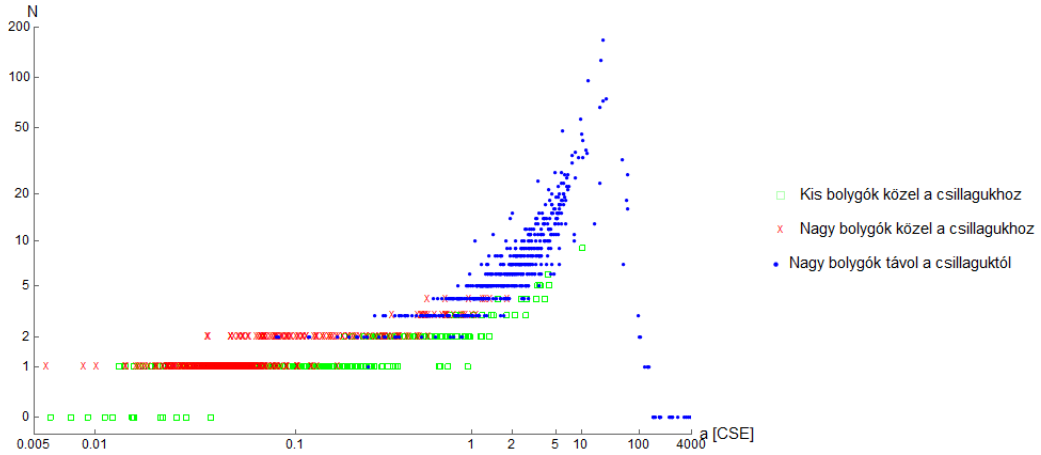
Látjuk, hogy az eredmények viszonylag jók, ahhoz képest, hogy nagyon összetett és kaotikus tulajdonságokkal is jellemezhető rendszer egyik tulajdonságát akarjuk megállapítani kevés paraméter alapján. A gázbolygóknál a valós holdszám – legtöbb esetben – hibahatáron belül van, és látszik, hogy a kisebb bolygóknál nagyobb holdszámot feltételez az elméletünk. Ez azért van, mert kisebb bolygóknál nem annyira reális az a közelítés, hogy a bolygót és a holdat kéttest-problémaként kezeljük. Ha ugyanis egy kisebb tömegű bolygóról van szó, akkor a csillag és egyéb nagy közeli bolygók hatása miatt a hold nem a megszokott ellipszis alakú pályán kering, és emiatt a szabályos holdak nem maradnak stabilak az idők folyamán. Ez nem jelent nagy problémát, mivel a hiba nem túl nagy, és egyébként is a nagyobb holdrendszerekre fókuszálunk. Ami látszik még, hogy a Neptunusznál sokkal több holdak jelez az elmélet. Ez azért nem mond ellent a modellünknek, mert a Neptunusz körül lehetséges, hogy vannak még feldezetlen, kisebb szabályos holdak. A legkisebb ismert szabályos hold a Neptunusz körül (Hippocamp), ezerszer nagyobb tömegű, mint az általunk definiált alsó tömeghatár.

Lássunk akkor egy ábrát az összes ismert exobolygóról (amiknek a releváns paraméterei is ismertek) [6], ahol összehasonlítjuk a tömegüket a csillag tömegének és a bolygó fél nagytengelyének arányával (8. ábra).



8. ábra. Az összes eddig ismert exobolygó pontként jelölve, amelyeknek a tömege és a csillag tömegének és a bolygó fél nagytengelyének aránya van összehasonlítva, ez utóbbi logaritmikus skálán.

Ez az ábra összefoglalja minden eddigi ismeretünket az exobolygókról, és a cikkben tárgyalt modellt, ami alapján választ kapunk a kérdésre, hogy hova érdemes néznünk. Láthatjuk, hogy az eddig felfedezett holdakat három nagyobb csoportra oszthatjuk. Ezek azért lesznek lényegesek, mert a kisebb bolygóknál a Naprendszerben is nagyobb becsült értéket kaptunk, mivel nem számoltunk az instabilitással. Ez azt jelenti, hogy a kis exobolygóknál is valószínűleg túl nagy számot fogunk kapni. A 9. ábra megmutatja, hogy melyik bolygó birtokolja potenciálisan a legtöbb holdat, és ebből megtudhatjuk, hogy hol érdemes exoholdat keresni:



9. ábra. Az összes eddig ismert exobolygó holdjainak legvalószínűbb száma (logaritmikus skálán) a bolygó-pálya fél nagytengelye függvényében

Látható, hogy minden exobolygóra nagyságrendileg reális eredményeket kapunk, ami jelzi, hogy az elmélet jól működik. Szintén megfigyelhetjük, hogy a legtöbb holdra olyan óriásbolygók körül számíthatunk, amelyek körülbelül 20 CSE távolságra vannak központi csillaguktól. A jelenleg ismert exobolygők közül a legtöbb holdat legvalószínűbben a HR 2562 b jelű bolygó körül találhatunk, modellünk szerint várhatóan 167 ± 56 szabályos holdja van. A probléma csak az, hogy a bolygó olyan nagy tömegű, hogy talán már nem is lehet bolygónak nevezni, inkább barna törpe [7] tömegű, de ma még bolygó besorolású égitest. Láthatjuk az ábrán azt is, hogy nagyon távoli bolygóknak nincsen egy holdjuk sem, ami azért van, mert itt nagyon alacsony a felületi sűrűség, és emiatt nincs elég tömeg a holdak kialakulására. Szintén megfigyelhető az ábrán, hogy sok olyan kis bolygó van, amelyik közel van a csillagához, ennek ellenére mégis van 1-2 holdja.

Ez a szituáció ismerős lehet, hiszen ugyanez a probléma adódott a Naprendszernél is. Ugyanúgy, a stabilitás figyelembevételének hiánya okozza ezt a pontatlanságot. Ha ezzel is számolnánk, valószínűleg nagyjából eggyel csökkenne a holdak száma a csillagukhoz közeli kis bolygóknál.

2.3. Keringési idők, pályák

Ebben a részben néhány további paramétert tárgyalunk, amelyek a holdak fontos tulajdonságait határozzák meg. Ezenkívül megvizsgálunk egy effektív keresési módszert a lakható exoholdakra, és általánosságban a különböző hőmérsékletű/méretű exoholdakra.

Kezdjük a holdak pályaeloszlásával. Ha már tudjuk, mekkora a legnagyobb hold tömege, és hogyan oszlanak el a holdak tömeg szerint egy bolygó körül, akkor még továbbra is ismeretlen a holdak fél nagytengely szerinti eloszlása. Két alapvető határt meghatározhatunk: a holdak nem keringhetnek közelebb a Roche-határnál [8] és a Hill-szférán belül kell keringeniük, viszont általában inkább a Hill-sugár felével szoktak számolni, mivel ezen belül maradnak ténylegesen stabilak a holdak [9]. A holdak bolygó körüli keringésének periódusára felírható egy, a Titius–Bode-szabályhoz hasonló reláció [10]:

$$T_k = T_c \alpha^k \tag{17}$$

ahol T_c és α adott bolygóra jellemző állandók, k pedig a holdak növekvő pályasugár szerinti sorszáma. A megfigyeléseken alapuló empirikus tapasztalatunk szerint α egy kis pozitív egész szám gyöke [10]. Emellett definiáljuk $T_0 = T_c/\alpha$, és a Naprendszer bolygóin alapuló megfigyelési tapasztalat, hogy

$$\frac{T_0}{T_p} \approx 1.077 \Rightarrow \frac{T_c}{\alpha T_p} \approx 1.077 \tag{18}$$

ahol T_p a bolygó (saját tengely körüli) rotációs periódusa. Ez a reláció kétféleképpen is hasznos lehet:

- a bolygó rotációs periódusának megállapítása néhány hold keringési periódusának ismeretében
- a holdak pályasugarána becslése a bolygó rotációs periódusának ismeretében.

Fontos megjegyezni, hogy az első lehetőség egyelőre nem releváns, mivel egy exobolygó körül keringő több exohold felfedezésétől még elég távol állunk. A második lehetőséget már most is használhatjuk, például a β Pictoris b exobolygónál, aminek megállapították a rotációs periódusát [11] a következő módon: A bolygót le tudták fotózni elég nagy pontossággal ahhoz, hogy a két szélső részén lévő spektrumvonal-eltolódás látható lett, és ebből a Doppler-effektus alapján meg lehetett állapítani a rotációs periódust. Ennek értéke kb. 8,1 óra. Így $T_0 \approx 8{,}7$ óra. Nézzük most meg, hogy hány holdja lehet ennek az exobolygónak, amiből a pályasugarakat állapíthatjuk meg, ha már tudjuk, hogy A melyik kis pozitív egész számnak a gyöke. Mivel a csillag még elég fiatal, ezért 0 jön ki a holdjainak számára, viszont megvizsgálhatjuk, mi lesz a jövőben, ha megmaradnak a csillag és bolygó paraméterei. Amikor a csillag annyi idős lesz, mint a Nap jelenleg, akkor a bolygónak már 8 szabályos pályán keringő holdja várható. Vizsgáljuk most meg, mennyi a lehető legnagyobb A értéke általánosságban:

$$\alpha_{max}^N = \frac{T_N}{T_c} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{r_H^3}{Gm}}}{1.077\alpha_{max}T_p} \Rightarrow \alpha_{max} = \left(\frac{2\pi\sqrt{\frac{r_H^3}{Gm}}}{1.077T_p}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tag{19}$$

A β Pictoris b esetében $\alpha_{max} \approx 2.8$. Ez nem azt jelenti, hogy $\alpha = 2.8$, ez csak egy maximális érték, hogy holdak ne keringjenek a Hill-szférán kívül. Ha azzal számolunk, hogy holdak nem keringhetnek a Hill-sugár felénél nagyobb pályasugárnál [9], akkor $\alpha < 2{,}5$. Nézzük most meg, mekkora α legkisebb értéke. A Roche-határ értéke:

$$r_{roche} = r_{h,n}\left(2\frac{m}{M(n)}\right)^{1/3} \tag{20}$$

ahol $r_{h,n}$ az n-edik hold sugara. A kérdés most már csak az, hogy a legbelső holdnak mekkora a tömege és sugara. Egyelőre figyeljük meg, hogy ezeket nem is kell tudnunk, mivel átírhatjuk az előző egyenletet a hold

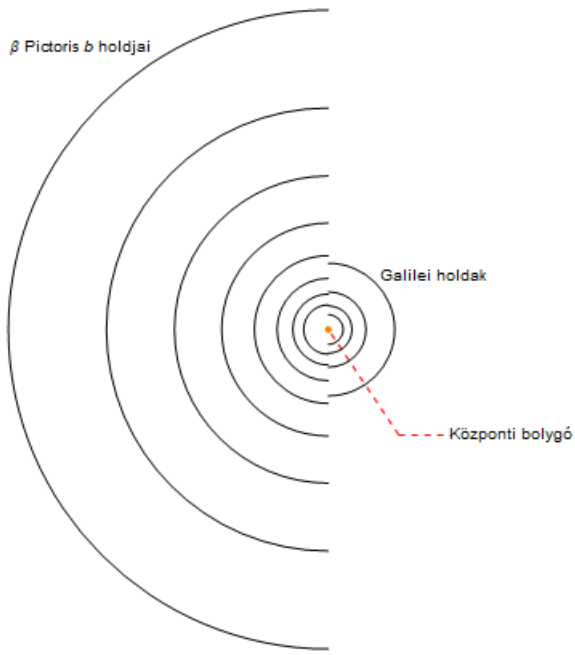
sűrűségére, amit majd a következő becsléssel számolhatunk:

$$r_{roche} = \left(2\frac{mr_{h_n}^3}{M(n)}\right)^{1/3} = \left(2\frac{m\frac{4}{3}\pi r_{h_n}^3}{\frac{4}{3}\pi M(n)}\right)^{1/3} = \left(2\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\rho_n}\right)^{1/3} = \left(\frac{3m}{2\pi\rho_n}\right)^{1/3} \tag{21}$$

Számoljunk egy átlagosnak gondolható kőzethold sűrűségével $\rho_n \approx 3000kg$,m^{-3}. Így a β Pictoris b Roche-sugara kb. $1{,}54 \cdot 10^8$ m, tehát a legbelső hold pályájának sugara nem lehet ennél kisebb. Tudjuk, hogy a legbelső hold pályájának periódusa $T_c\alpha$, tehát

$$T_c\alpha > 2\pi\sqrt{\frac{r_{roche}^3}{Gm}} \;\Rightarrow\; \alpha^2 > \frac{2\pi}{1.077T_p}\sqrt{\frac{r_{roche}^3}{Gm}} \tag{22}$$

Jelen esetben ez azt jelenti, hogy $\alpha > 0{,}56$, tehát α lehetséges értékei a következők: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. A Naprendszerben α-ra tipikus értékek $\sqrt{2}$ és 2 között vannak, ezért tegyük fel, hogy a β Pictoris b-re $\alpha = \sqrt{3}$, mivel ez a lehetőségek közül egy közbenső érték, ami valószínű a pályák stabilitása miatt. Emiatt $T_c \approx 54400\ s$. Nézzük akkor meg, hogyan nézhet ki a β Pictoris b körüli holdrendszer összehasonlítva a Jupiter Galilei-holdjaival (10. ábra).



10. ábra. A Jupiter és a β Pictoris b lehetséges holdrendszerének összehasonlítása a holdpályák nagysága alapján

2.4. Exoholdak felszíni hőmérséklete

Nagy előny a többi bolygóval szemben, hogy a β Pictoris b esetén becslést tudunk adni arra, hogy a szabályos holdjai hol helyezkednek el. Emlékezzünk vissza, hogy a tömegüket is meg tudjuk állapítani a tömegeloszlás alapján:

$$M(n) = \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c\sqrt{a}} + 1\right)^{-n} \tag{23}$$

Nézzük meg, hogy vajon lakhatóak-e ezek a holdak, vagyis végezzünk becslést a felszíni hőmérsékletükre. Ezt kiszámolhatjuk egyszerűen a csillag luminozitásából. Felhasználjuk, hogy a holdat érő besugárzott

teljesítmény ugyanakkora, mint az abból távozó. Ha a Stefan–Boltzmann-törvényből levezetjük az egyenletet a hőmérsékletre, akkor a következőt kapjuk:

$$(1-\alpha)\frac{1}{4}\frac{L_{star}}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{(1-\alpha)\frac{L_{star}}{16\sigma\pi a^2}} \tag{24}$$

ahol α a hold albedója, L_{star} a csillag luminozitása, és σ a Stefan-Boltzmann állandó. Nehézség, hogy a központi bolygó nagy hatással lehet a holdra. Két hatást kell megemlítenünk: Az első (és jelentősebb) hatás a bolygóból származó árapályfűtés [12], ami a gravitációs energiából származik. Ezt a következőképpen kaphatjuk meg:

$$L_{tidal} = \frac{21}{2}\frac{k_2}{Q}\frac{Gm^2 {r_h}_n^5 ne^2}{a_n^6} \tag{25}$$

ahol k_2 az úgynevezett Love-szám, Q a jósági tényező, n a hold középmozgása, e a hold pályájának excentricitása és a_n a hold pályájának fél nagytengelye. Ez az energia a hold felszínén hőként jelenik meg. A következő hatás a Kelvin–Helmholtz-mechanizmus [13], ami a magából a bolygóból származó luminozitás. Ezt a Naprendszerben a Jupiternél lehet a legjobban megfigyelni, és az egész abból ered, hogy a bolygó lassan zsugorodik. A következő (empirikus) egyenletet lehet rá felírni:

$$L_{KH} = 0.272 \cdot 10^{-3}\eta^{-4.352}\left(\frac{10^{-2}}{K_R}\right)^{1.184}\left(\frac{m}{0.05M_\odot}\right)^{1.305}\mu_e^{0.611}\epsilon^{1.548}\frac{\mu^{1.184}}{\left(1+\frac{\psi}{\eta}\right)^{0.364}}\frac{J}{s} \tag{26}$$

ahol η a bolygó degenerációjának mértéke, K_R a bolygó anyagának Rosseland-opacitása, $M_\odot$ a Nap tömege (mint tömegegység), μ_e a barionok száma elektrononként, ϵ az egynletet leíró differenciálegyenletben szereplő mértékegység nélküli paraméter, μ a molekuláris tömeg, és ψ a bolygóban lévő gáz degenerációjától függő paraméter. Ezeket a paramétereket kifejezhetjük egyértelműbb paraméterek függvényeként, de lényeges, hogy lássuk, a holdakra két másik hatás is tud hatni, tehát a lakható zóna kijjebb tolódik. Ez azt jelenti, hogy ott is lakható körülményekre számíthatunk holdaknál, ahol eddig talán nem gondoltuk.

3. Konklúzió

Láttuk, hogy egy bolygó néhány jellemző paraméteréből becslést lehet adni szabályos holdjainak számára. Talán még lényegesebb, hogy az egyes holdak tömegét és a bolygó rotációs periódusából a pályájuk sugarát is ki tudjuk számolni, ezenkívül a hőmérsékletükre is pontosabb becslést adhatunk. Láttuk azt is, hogy a Naprendszerben lévő néhány nagyobb holdrendszerre jó eredményeket kaptunk, és megsejtettük, hogy a Neptunusznak valószínűleg több szabályos holdja van, mint ahányat ismerünk. Továbbá exobolygók holdjainak paramétereire is tudunk becslést adni, ami effektív keresőalgoritmus lehet exoholdak felfedezéséhez.

Irodalom

1. A. Teachey, D. M. Kipping & A. R. Schmitt: On the dearth of Galilean analogs in Kepler, and the exomoon candidate Kepler-1625B I. `https://arxiv.org/pdf/1707.08563.pdf`.
2. D. J. Stevenson: Origin of the Moon-The Collision Hypothesis. `https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ea.15.050187.001415`.
3. Steven Desch, Nikki Staab & Arizona State University: Solving solar system quandaries is simple: Just flip-flop the position of Uranus and Neptune. `https://www.eurekalert.org/pub_releases/2007-12/asu-sss121107.php`.
4. Sanford S. Davis: The surface density distribution in the solar nebula. `https://iopscience.iop.org/article/10.1086/432464/pdf`.
5. Wikipédia. kép. `https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point#/media/File:Lagrangian_points_equipotential.jpg`.
6. NASA Exoplanet Archive: `https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/`.

7. Adam J. Burgasser: Brown dwarfs: Failed stars, super Jupiters. https://web.archive.org/web/20130508182012/http://astro.berkeley.edu/~gmarcy/astro160/papers/brown_dwarfs_failed_stars.pdf.
8. Roche Limit. https://www.cs.mcgill.ca/~rwest/wikispeedia/wpcd/wp/r/Roche_limit.htm.
9. Hiroshi Mizuno, Kiyoshi Nakazawa & Chushiro Hayashi: Instability of a Gaseous Envelope Surrounding a Planetary Core and Formation of Giant Planets. https://academic.oup.com/ptp/article/60/3/699/1848127.
10. S. F. Dermott: On the Origin of Commensurabilities in the Solar System—II The Orbital Period Relation. https://academic.oup.com/mnras/article/141/3/363/2601528.
11. I. A. G. Snellen, B. R. Brandl, R. J. de Kok, M. Brogi & J. Birkby and H. Schwarz: The fast spin-rotation of a young extra-solar planet. https://www.eso.org/public/archives/releases/sciencepapers/eso1414/eso1414a.pdf.
12. Wade G. Henning, Richard J. O'Connell & Dimitar D. Sasselov: Tidally heated terrestrial exoplanets: viscoelastic response models. https://arxiv.org/pdf/0912.1907.pdf.
13. Koushik Ghosh: Brown Dwarf Like Behaviors of Jupiter. http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2007ASPC..362..310G.