

## 2. félévi beszámoló

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Fizika Doktori Iskola  
Részecskefizika és Atommagfizika Program

### Rácstérelméleti módszerek véges kémiai potenciálon

Pesznyák Dávid (david.pesznyak@gmail.com)  
Témavezető: dr. Pásztor Attila

## Bevezető

A kvantum-színdinamika (QCD; *quantum chromodynamics*) rácstérelméleti megfogalmazásán keresztül lehetséges az erősen kölcsönható anyag hőmérséklet ( $T$ ) és bariokémiai potenciál ( $\mu_B$ ) síkon vett fázisdiagramjának első elvekből való vizsgálata [1, 2]. A kutatásokat nagy  $\mu_B$  mellett az ún. előjelprobléma akadályozza [3]. Euklideszi térelméletek pályaintegrálokkal való megfogalmazásakor megfigyelhető mennyiségek Monte-Carlo-módszerekkel történő kiszámítása során nem-triviális kiejtések következtében a rendszer szabadsági fokaiban és  $\mu_B$ -ben exponenciálisan kicsi jel-zaj arány tapasztalható. Kutatómunkám célja vizsgálni, hogy különböző új módszerekkel hogyan és milyen mértékben lehet javítani az előjelproblémán.

Az első félévben komplex kontúrdeformációk [4, 5] és gépi tanulási módszerek segítségével kerestem olyan optimalizált integrálási sokaságokat, amelyek mentén az előjelprobléma javítható a Stephanov-féle királis véletlen mátrix modellben [6, 8]. Ebben a félévben egyrészt szimulációs kódokat fejlesztettem, amelyek segítségével lényegesen összetettebb, a QCD-hez még inkább hasonló elméletekben fogom vizsgálni az előjelprobléma komplex kontúrdeformációkon alapuló javításait. A kódok a tiszta  $SU(3)$  mértékelméletet és a QCD nagysűrűségű nehézkvarkokat tartalmazó HDQCD (*heavy-dense QCD*) limeszét implementálja [7]. Ezt követően az ÚNKP ösztöndíjprogram keretein belül a QCD kvantumszámítógépeken történő szimulálhatóságával foglalkoztam. A kvantumszámítógépek természetükből adódóan képesek komplex számítási műveletek elvégzésére, ennél fogva használatukkal megkerülhető lenne az előjelprobléma. A limitált mennyiségű elérhető qubit miatt célszerű a folytonos mértékcsoportok memóriahatékonyabb diszkrétizációit használni, ezért az  $SU(3)$  mértékcsoport  $S(1080)$  diszkrét részcsoportját vizsgáltam [9], egyelőre fermionterek bevezetése nélkül. Tanulmányoztam a csoport diszkrét jellegéből adódó kifagyási fázisátalakulás tulajdonságait, illetve a folytonos és diszkrét részcsoportok ún. Hamilton-limeszét, azaz a diszkrét térszerű rács melletti folytonos idő határesetet [10].

# Az aktuális félévben elvégzett kutatások ismertetése

A félév során elvégzett kutatási tevékenységeimet az alábbi alpontokban mutatom be röviden.

## SU(3) és HDQCD kódfejlesztés

Tiszta SU( $N$ ) mértékelméletet megvalósító rácstérelméleti szimulációkhoz a hatás mértékterekre vonatkozó részét a Wilson-féle rácshatással írjuk le. Tiszta mértékelméletek esetén nem vezetjük be a fermiontereket, csak mértéktereink vannak. A Wilson-hatást az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$S_W = \frac{\beta}{N} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(x)] , \quad (1)$$

ahol  $\beta$  a mértécsatolás, az első összegzés a téridőrács pontjaira vonatkozik, míg a második a négy lehetséges téridő irányra. Az  $U_{\mu\nu}(x)$  mennyiség az ún. plakett, ami a rácspontok közti éleken definiált  $U_\mu(x)$  mértéktereket leíró SU( $N$ ) mátrixok egy „téridő négyzet” mentén vett rendezett szorzatát jelenti. A szimulációs kódom tesztelésekor reprodukálni tudtam az átlagos plakett várható értékének  $\beta$ -függését különböző téridő térfogatok mellett (pl. [11]).

Fermionterek bevezetésekor a térkonfigurációkra vett pályaintegrálban egzakttul ki tudjuk integrálni a fermiontereket, ezáltal megjelenik az ún.  $\det M$  fermiondetermináns, ami két kvarkíz esetén a HDQCD közelítésben az alábbi alakot ölti

$$\det M = \prod_x \det (\mathbb{1} + h e^{\mu_B/T} \mathcal{P}_x)^2 \det (\mathbb{1} + h e^{-\mu_B/T} \mathcal{P}_x^{-1})^2 , \quad (2)$$

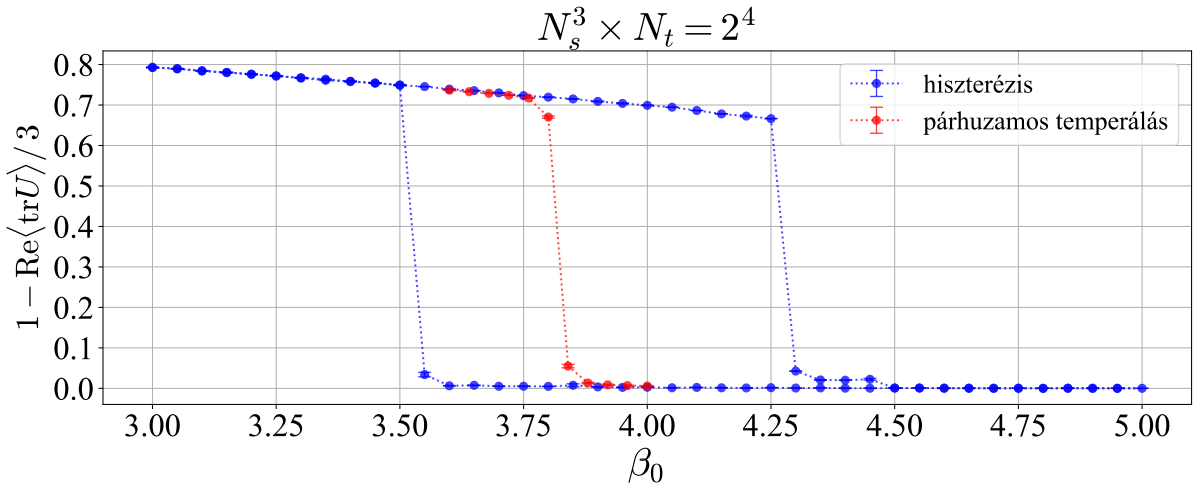
ahol  $h = (2\kappa)^{N_t}$  ( $N_t$  a rács időirányú kiterjedése, míg  $\kappa$  az inverz kvarktömeget jellemzi),  $T$  a hőmérséklet és  $\mathcal{P}_x = \prod_{t=0}^{N_t-1} U_0(x + \tau\hat{0})$  a Polyakov-hurok. Ebben a limeszben  $\kappa e^{\mu_B}$  rögzített, miközben  $\kappa \rightarrow 0$  és  $\mu_B \rightarrow \infty$  [7]. A HDQCD-t megvalósító szimulációs kódban szintén a fent bemutatott Wilson-hatást használom mint a mértéktereket leíró hatást, azaz a HDQCD-ben a teljes hatás  $S = S_W - 2 \log \det M$ . A HDQCD-ben véges  $\mu_B$  mellett is fellép egy, a teljes QCD esetétől gyengébb, előjelprobléma. Az elkövetkező félévekben vizsgálni fogom, hogy a komplex kontúrdeformációk milyen mértékben tudnak javítani ezen az előjelproblémán.

## S(1080) mint diszkrétizált mértékcsoporthoz

A félév második felében azt vizsgáltam, hogy mi történik akkor, ha a QCD gluonjait leíró SU(3) folytonos mértékcsoporthoz annak S(1080) diszkrét részcsoporthoz cseréljük le. Egy ilyen diszkrétizáció memóriahatékonyabb, mint a teljes folytonosan sok elemű csoport használata, így lehetőséget adhat a QCD jövőbeli, kvantumszámítógépeken való vizsgálatára. A közeljövőben a kvantumszámítás egyik fő korlátja a qubitek maximális száma lesz, és éppen ez motiválja a memóriahatékony megoldások vizsgálatát. A megfelelő memóriahatékony diszkrétizációk megalkotásának fő nehézsége egy kifagyási átmenet (*freezing transition*), mely folytonos csoportok esetén nem lép fel: a diszkrétizáció következtében a hatásban a legkisebb és a második legkisebb érték között véges a különbség,

befagyáskor az összes olyan konfiguráció, amely nem a triviális (zérus mértéktér) mértéktranszformáltja exponenciálisan el van nyomva. Mivel ez az átmenet kis mértékcsoport esetén lép fel, ez megnehezíti a finom rácsok használatát diszkrétizált csoporttal.

A félév során tanulmányoztam a kifagyási átmenet tulajdonságait. Meghatároztam a fázisátalakuláshoz tartozó kritikus mértékcsoportot, továbbá azt tapasztaltam, hogy ez az elsőrendű fázisátmenet erős hiszterézist mutat. Ezt leküzdendő implementáltam az ún. párhuzamos temperálás (*parallel tempering*) módszerét, mely alapján különböző mértékcsoportok mellett futó szimulációk között – néhány Monte-Carlo lépésenként valamilyen adott valószínűséggel – kicserélhetem a konfigurációkat. Ez vázlatosan azt jelenti, hogy a fázistér valamilyen kis részében esetlegesen „csapdába esett” konfigurációkat kiszabadítva javítani tudom a szimulációt. A hiszterézis és a párhuzamos temperálással kapott eredmény az 1. ábrán látható. Az általam kapott kritikus  $\beta$  két korábbi, egymással nem összeegyeztethető eredmény közé esik: [9, 12].



**1. ábra.** A diszkrét  $S(1080)$  csoport esetén fellépő fázisátalakulás és az ekkor tapasztalható hiszterézis.

## Rácstérelméletek Hamilton-limesze

Ahhoz, hogy rácstérelméleteket szimulálhassunk kvantumszámítógépeken, szükségünk van egy Hamilton-operátorra, azaz meg kell határoznunk az euklideszi elmélet Hamilton-limeszét. Ekkor a térszerű rácspontokat megtartjuk diszkrétnek, miközben vesszük a folytonos idő határesetet. Ehhez anizotrópiát kell bevezetnünk a térszerű és időszerű plakketek között a hatásban, továbbá válasszunk időszerű mértéket (*temporal gauge*), azaz rögzítsük az összes időszerű élt a rácsban  $\mathbb{1}$ -re. Ekkor a hatás

$$S_W^a = -\beta_S \sum_x \sum_{k < l} \text{Re tr} U_{kl}(x) - \beta_T \sum_x \sum_k \text{Re tr} [U_k(x + \hat{0}) U_k^\dagger(x)] , \quad (3)$$

ahol  $k, l = 1, 2, 3$ . Folytonos mértékcsoport esetén tudjuk, hogy a mértékcsoportok skálázása  $\beta_S \sim a_t$  és  $\beta_T \sim 1/a_t$  szerint történik, ahol  $a_t$  az időirányú ráczállandó, és a Hamilton-operátor az ún. Kogut–Susskind-féle Hamilton-operátor lesz [10]. A Hamilton-limesz vizsgálata motiválja, hogy a nem-izotróp esetben is tanulmányozzuk a kifagyási átmenetet, mivel az irodalomban eddig csak izotróp esetet vettek figyelembe.

## Publikációk

M. Giordano, A. Pasztor, D. Pesznyak, Z. Tulipant, *Fighting the sign problem in a chiral random matrix model with contour deformations*. (arXiv:2301.12947 [hep-lat]).

A cikk elbírálás alatt van a *Physical Review D* folyóiratnál.

## Tanulmányi tevékenység az aktuális félévben

Ebben a félévben az alábbi kurzusokat végeztem el:

- FIZ/2/008E, *Szolonok és instantonok I.* (jeles), dr. Nógrádi Dániel;
- FIZ/2/081E, *Gyenge kölcsönhatás* (jeles), dr. Matteo Giordano.

## Konferenciák és előadások az aktuális félévben

Ebben a félévben a *GPU Day 2023 - Massive parallel computing for science and industrial application* (2023. május 15.-16., Budapest, Magyarország) konferencián vettem részt. Ezen felül a nyár folyamán részt fogok venni a *Methods of Effective Field Theory and Lattice Field Theory* nyári iskolán a Physikzentrum Bad Honnef szervezésében 2023. július 9.-21. között Németországban.

Továbbá angol nyelvű, 1 órás szemináriumi előadást tartottam az előző féléves eredményeimről az Elméleti Fizikai Tanszék által szervezett részecskefizikai ELFT szemináriumon. Az előadásom diasora: [https://bodri.elte.hu/seminar/pesznyak\\_20230411.pdf](https://bodri.elte.hu/seminar/pesznyak_20230411.pdf).

## Elismerések

A 2022/23-as tanévre elnyertem az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíját.

## Hivatkozások

- [1] Pesznyák Dávid. 1. féléves beszámoló. [https://physics.elte.hu/media/e4/a1/5fc73bfe2540fc7e66bc26ab1dbccf0831935bc957e22dd640ab6027f84a/PHYS\\_Pesznyak\\_1.pdf](https://physics.elte.hu/media/e4/a1/5fc73bfe2540fc7e66bc26ab1dbccf0831935bc957e22dd640ab6027f84a/PHYS_Pesznyak_1.pdf)
- [2] M. A. Stephanov. *QCD Phase diagram and critical point*. Prog. Theor. Phys. Suppl. 153 (2004), 139-156, Int. J. Mod. Phys. A 20 (2005), 4387-4392
- [3] P. de Forcrand. *Simulating QCD at finite density*. PoS LAT2009 (2009) 010
- [4] A. Alexandru, G. Basar, P. F. Bedaque, N. C. Warrington *Complex paths around the sign problem*. Rev. Mod. Phys. 94 (2022) no.1, 015006
- [5] M. Giordano, K. Kapás, S. D. Katz, A. Pásztor, Z. Tulipánt. *Exponential improvement of the sign problem via contour deformations in the 2+1D XY model at non-zero density*. Phys. Rev. D 106 (2022) no.5, 054512.
- [6] M. A. Stephanov. *Random matrix model of QCD at finite density and the nature of the quenched limit*. Phys. Rev. Lett. 76 (1996), 4472-4475
- [7] G. Aarts, F. Attanasio, B. Jäger, D. Sexty. *The QCD phase diagram in the limit of heavy quarks using complex Langevin dynamics*. JHEP 09 (2016), 087
- [8] M. Giordano, A. Pásztor, D. Pesznyák, Z. Tulipánt. *Fighting the sign problem in a chiral random matrix model with contour deformations*. arXiv:2301.12947 [hep-lat].
- [9] A. Alexandru *et al.* [NuQS]. *Gluon Field Digitization for Quantum Computers*. Phys. Rev. D 100 (2019) no.11, 114501
- [10] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices*. Oxford University Press, 1983.
- [11] C. Gattringer, C. B. Lang. *Quantum chromodynamics on the lattice*. Lect. Notes Phys. 788 (2010), 1-343 Springer, 2010.
- [12] G. Bhanot, C. Rebbi. *Monte Carlo Simulations of Lattice Models With Finite Subgroups of  $SU(3)$  as Gauge Groups*. Phys. Rev. D 24 (1981), 3319