

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Tanári TDK Dolgozat



Tóth Ábel
Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium

Lépcsőn pattogó labda vizsgálata

Témavezető:
Tél Tamás
ELTE, Elméleti Fizika Tanszék

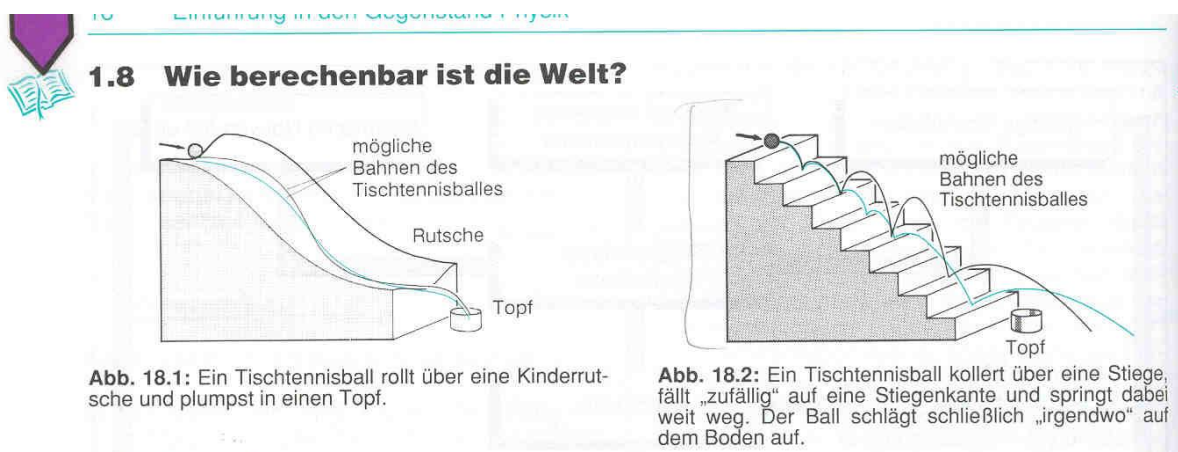
Absztrakt

Ismert probléma, hogy egy labda szögletes lépcsőn történő pattogása összetett, de nem kaotikus. Dolgozatunk tárgya, egy pontszerű labda kiterjedt, körív alakú sarokkal rendelkező lépcsőn lefelé pattogó mozgása. Először matematikai háttérrel adunk a folyamatnak, analitikus képleteket, illetve numerikus eljárást nyújtva, melyekkel rekurzívan meghatározható a labda mozgása. A kapott képletekből számítógép segítségével modellezzük a mozgást, és megvizsgáljuk, a szögletes lépcső esetét egy kis méretű sarokkal kiegészítve kapunk-e káoszra utaló jeleket. A labda fázisterét különböző méretű sugarakra, és különböző konstans értékű, majd változó értékű ütközési együtthatókra vizsgáljuk meg, és megmutatjuk, hogy tipikusan kaotikus mozgás alakul ki.

1. Bevezetés

Egy osztrák tankönyv [1] kaotikus mozgásra felhossa példának a lépcsőn pattogó labda mozgását (0. ábra). Ezt az állítást tényként közli, alá semmivel sem támasztja. Az ábra és a hétköznapi tapasztalat ugyan sugallja, hogy a néhány lépcsőfokon történő pattogás végeredménye nagyon változó, káoszról azonban csak hosszan tartó mozgások esetében beszélhetünk. Ezért van szükség részletesebb vizsgálatra. A káosz széleskörben elfogadott definíciója szerint olyan hosszantartó mozgás, mely az alábbi egyszerre jelenlevő tulajdonságokkal rendelkezik [4,8]:

- (i) nem ismétli magat (közelítőleg sem),
- (ii) nem jelezhető előre, vagyis közeli pontok átlagosan exponenciális tempóban távolodnak egymástól, s
- (iii) a fázistérbeli ábrázolásban kiterjedt, de mégis strukturált, fraktál szerkezetű pontthalmaz jellemzi a mozgás mögött meghúzódó kaotikus attraktort.



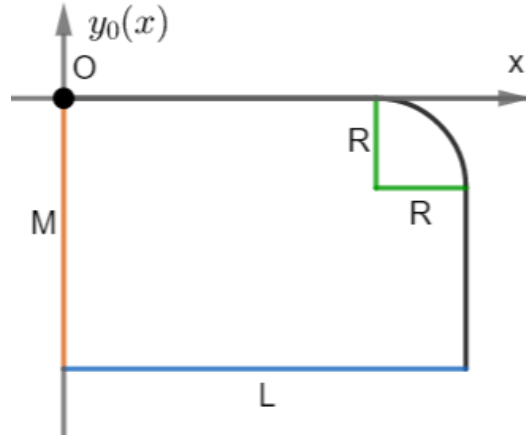
0. ábra: Az [1] tankönyv ábrája. Azt mutatja be, hogy míg egy csúszdán lecsúsztatott labda (bal oldali kép) útja könnyen megjósolható, a lépcsőn pattogó labda (jobb oldali kép) mozgása kiszámíthatatlan.

A tankönyv tézisének igazságtartalmát kívánták megvizsgálni néhány éve a [2] cikk szerzői, akik megállapították, hogy - szögletes lépcső esetén - a mozgás ugyan összetett, de nem kaotikus. A kváziperiodikus mozgás bizonyult általánosnak. A cikkben kétdimenziós modellben pontszerű, rugalmas labdát vizsgáltak 1-nél kisebb ütközési együtthatóval. Mi, egy lekerekített sarkú lépcsőn kívánjuk minél áthatóbban megvizsgálni egy pontszerű labda mozgását, majd megállapítani, hogy a szórófelületként működő kerek sarok mennyiben módosítja a helyzetet, és milyen esetekben vezet kaotikus mozgáshoz, ha az egyáltalán előfordul.

A dolgozat 2.-7. fejezetekben a modellt és az alkalmazott numerikus eljárást írja le, az eredmények a 8. fejezetben és a függelékben találhatók, míg a 9. és 10. fejezetek az összefoglalást és a kitekintést

2. A lépcső

Tekintsünk egy jobbra lejtő, hosszú lépcsőt az alábbi modell alapján: legyen egy lépcsőfok egy lekerekített sarkú téglalap, melynek hossza L , magassága M , és a „lekerekítés” úgy történik, hogy a jobb felső sarok helyett egy R sugarú negyedkörív található (1. ábra). Egy lépcsőfok $y_0(x)$ függvénye a lépcsőfok tetejének bal oldaláról mint origóból nézve az alábbi összefüggéssel adható meg:



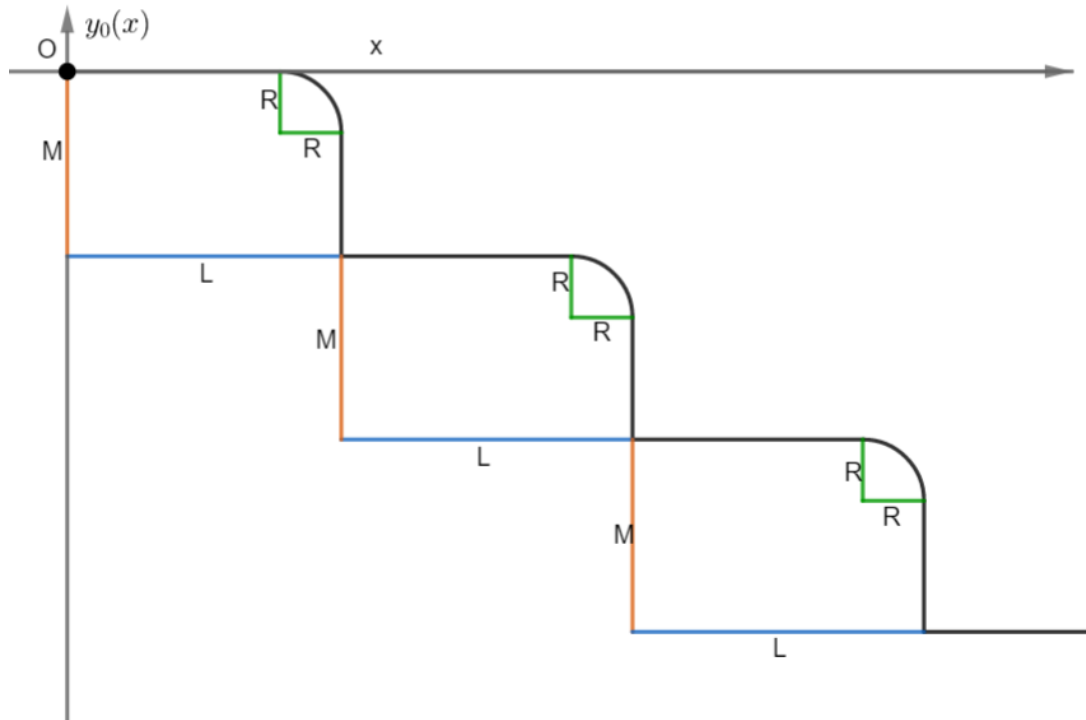
1. ábra: A lépcsőfok $y_0(x)$ alakja (fekete görbe) M magassága, és L szélessége alapján. A lekerekítés egy R sugarú negyedkörív alakját írja le.

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq L - R, \\ \sqrt{R^2 - (L - R + x)^2} - R, & \text{ha } x > L - R, \end{cases} \quad (1)$$

ahol $R < L$. Ez természetesen kiterjeszthető, és az origóból megadható a teljes lépcső:

$$y_0(x) = \begin{cases} -NM, & \text{ha } LN < x \leq L(N+1) - R, \\ -NM + \sqrt{R^2 - (L - R + x)^2} - R, & \text{ha } L(N+1) - R < x \leq L(N+1), \end{cases} \quad (2)$$

minden $N \geq 0$ egész számra (2. ábra). Az egyszerűség kedvéért tekinthetjük mindig az origót a legfelső lépcsőfok kezdőpontjának, hiszen úgysem lesz szükségünk az origó feletti lépcsőfokokra.



2. ábra: A teljes lépcső $y_0(x)$ alakja. Az origó a felső lépcsőfok kezdőpontja.

3. A labda mozgása

Tegyük egy pontszerűnek tekinthető labdát a legfelső lépcsőfokra, az $(x_0; y_0(x_0))$ koordinátájú pontra, ahol $x_0 < L$, s adjunk neki $u_0 > 0$ vízszintes irányú és $v_0 > 0$ függőleges irányú sebességet. A homogén gravitációs térben a labda egy parabola pályát fog leírni, majd leérkezik egy lépcsőfokra (3. ábra). Ez a lépcső N_0 lépcsőfokkal van lejjebb, mint az, ahonnan indult. (Ha ez ugyanaz lenne, mint ahonnan elindult, akkor $N_0 = 0$).

A lépcsőről visszapattanva a tökéletesen rugalmas ütközéshez képest a $k < 1$ és $j < 1$ függőleges, illetve vízszintes ütközési együttható következtében a felületre merőleges irányú komponense k -szorosára változik, a felülettel párhuzamos komponense $j < 1$ - szeresére csökkent. A labda mozgását célszerű úgy követnünk, hogy mindig az ütközés pillanatában tekintünk rá, a sebességeket közvetlenül az ütközés után rögzítjük. Érdemes az új origót annak a lépcsőfoknak a kezdőpontjára helyezni, ahol az n . ütközés történik. Így a labda koordinátái $(x_n; y_0(x_n))$, a függőleges és vízszintes irányú sebessége v_n és u_n . Nevezzük az egyszerűség kedvéért $y_0(x_n)$ -t y_n -nek, így általánosan a labdát jellemző adatok az n . ütközésben: x_n , y_n , u_n és v_n . Célszerű a t_n időváltozót is meghatározni, amely az n . és $n+1$. lepattanás között eltelt időt mutatja. Így két változó van, amely a labda n . és $n+1$. lepattanása közötti szakaszt jellemzi, t_n és N_n .

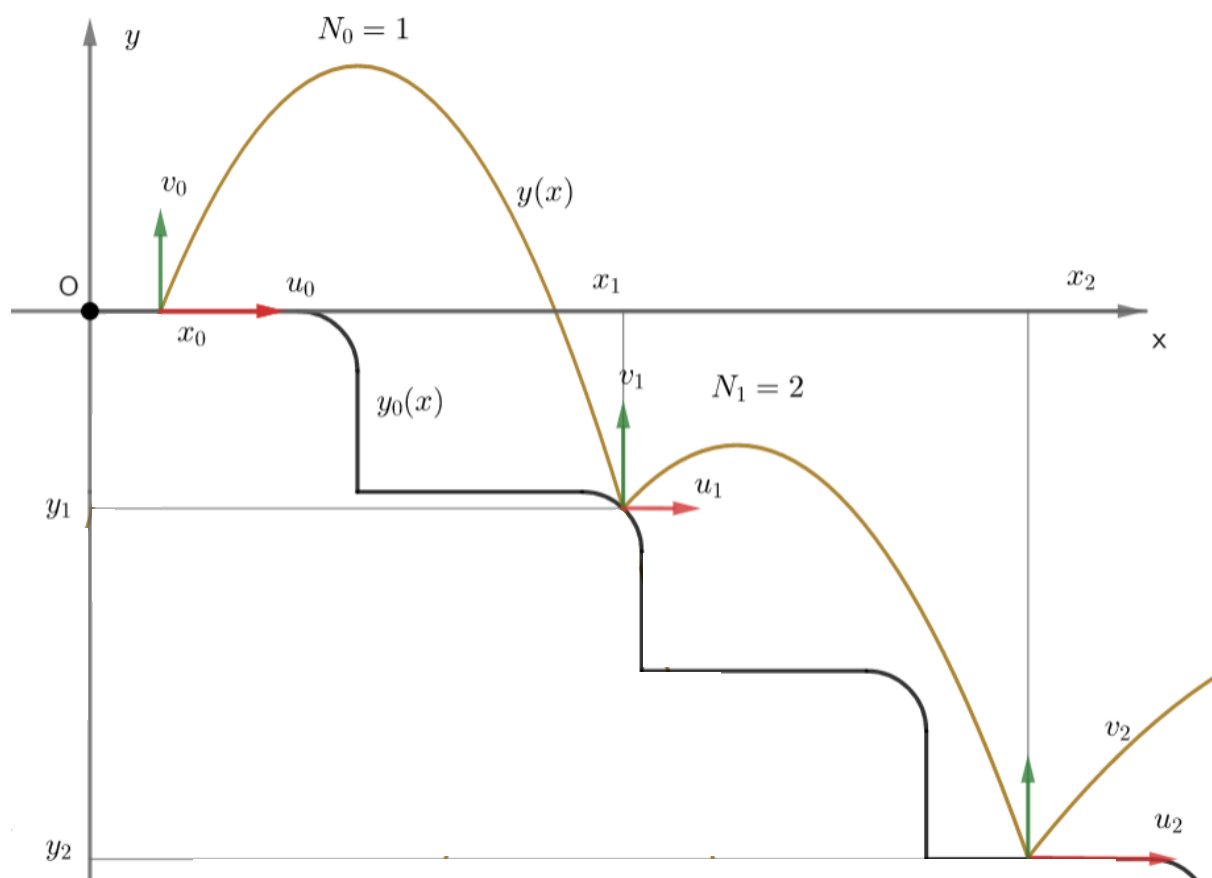
4. A mozgás követése

A) Általános gondolatok

Célunk, hogy kapcsolatot találjunk az n . és az $n+1$. ütközés adatai között. Vezessünk be ideiglenesen egy folytonos t változót is, mely az n . pattanás óta eltelt időt jelenti. A módszer, amellyel meghatározzuk a következő lepattanás helyét, ezen az időváltozón alapszik. Ennek a t változónak a függvényében megadjuk az n . ütközés után létrejövő ferde hajítás során a labda $x(t)$ és $y(t)$ koordinátáját, és a lépcső labdával megegyező $x(t)$ helyen lévő $y_0(t)$ magasságát. Az $n+1$. ütközés akkor történik meg, amikor először egyezik meg $y(t)$ és $y_0(t)$. A repülés t_n idejét úgy kapjuk meg, hogy képezzük a $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$ mennyiséget, mely eleinte pozitív, majd, amikor először előjelet vált, az a t_n idő, amelyre $\Delta y(t_n) = 0$. A pattanások között eltelt t_n idő segítségével kiszámolhatjuk a labda x_{n+1} és y_{n+1} helyadatait is. Ezek azt is meghatározzák, hogy hány lépcső felett repült át a labda, vagyis az N_n érték. Innen viszont a lépcső sarkára és lapjára pattanás esetében eltérő módszerrel kell meghatározni a lepattanás utáni u_{n+1} és v_{n+1} sebességkomponenseket. Így végül n . ütközés adataiból indulva megkapjuk az $n+1$. ütközés adatait. A mozgást az

$$(x_n, y_n, u_n, v_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})$$

leképezés alapján követjük. A mozgás folyamatára t_n és N_n jellemző, melyek a leképezés szempontjából fontos segédmennyiségek.



3. ábra: A labda pályájának alakja és jellemző adatai; az n . pattanás vízszintes és függőleges helye x_n és y_n , a közvetlenül pattanás utáni függőleges, illetve vízszintes sebessége u_n és v_n , az n . és $n+1$. pattanás között átvugrott lépcsők száma N_n .

B) t_n , N_n és az új helykoordináták számolása

Az n . ütközés után az origótól mért vízszintes távolsága:

$$x(t) = x_n + u_n t. \quad (3)$$

A labda függőleges elmozdulása az n . pattanás óta:

$$y(t) = y_n + v_n t - \frac{g}{2} t^2, \quad (4)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás

A lépcső $y_0(t)$ függvényét úgy kapjuk, hogy az $y_0(x)$ függőleges koordinátát az $x = x_n + u_n t$ helyen vesszük, azaz $y_0(t) = y_0(x(t))$, ami (3) alapján:

$$y_0(t) = \begin{cases} -NM, & \text{ha } LN < x_n + u_n t \leq L(N+1) - R, \\ -NM - R + \sqrt{R^2 - (L - x_n - u_n t)^2}, & \text{ha } L(N+1) - R < x_n + u_n t \leq L(N+1). \end{cases} \quad (5)$$

Itt N az a mennyiség, amely azt mutatja meg, hogy t idő alatt mennyi lépcső felett repült át a labda. A mozgás elején, $t = 0$ -ban az értéke 0, majd minden egyes alkalommal, amikor $\frac{x(t)}{L}$ egész része nő, N is vele növekszik. Végül $t = t_n$ időpillanatban, vagyis az $n+1$. pattanás pillanatában $N = N_n$.

$y_0(t)$ értéke $t = 0$ -ra megegyezik y_n -nel, ugyanis ekkor $N = 0$ és (1) alapján:

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_n \leq L - R, \\ \sqrt{R^2 - (L - R + x_n)^2} - R, & \text{ha } x_n > L - R. \end{cases} \quad (6)$$

Az n . és $n+1$. pattanás között eltelt t_n idő az a legkisebb pozitív időérték, amelyre:

$$y(t_n) = y_0(t_n) \quad (7)$$

Ezt az egyenletet általában csak numerikusan tudjuk megoldani. t_n ismeretében az $n+1$. ütközés koordinátái (az eredeti koordináta-rendszerben):

$$x_{n+1} = x_n + u_n t_n, \quad y_{n+1} = y_n + v_n t_n - \frac{g}{2} t_n^2. \quad (8)$$

Az átugrott lépcsők N_n számát meghatározhatjuk abból, hogy az y_{n+1} hány M lépcsőfok magassággal van az origó alatt. Ez az az N érték, amely $t = t_n$ -re az (5) összefüggésben érvényes. Úgy is gondolhatunk rá, hogy x_{n+1} hány L lépcsőfok hosszal van az origótól jobbra, így x_{n+1} ismeretében N_n megkapható úgy is, hogy $\frac{x_{n+1}}{L}$ egész részét vesszük:

$$N_n = \left\lfloor \frac{x_{n+1}}{L} \right\rfloor \quad (9)$$

Ezután átváltunk az új koordináta-rendszerbe, melynek középpontja annak a lépcsőfoknak a bal felső pontja, ahová a labda érkezett. Ebben a koordináta-rendszerben mérjük x_{n+1} és y_{n+1} -et, amit a (7) értékekből az alábbi transzformációval határozhatunk meg:

$$x_{n+1} \rightarrow x_{n+1} - LN_n, \quad y_{n+1} \rightarrow y_{n+1} - MN_n \quad (10)$$

C) Az új indulási sebességek számolása

Az eltelt idő ismeretében a közvetlenül lepattanás előtti sebességkomponensek:

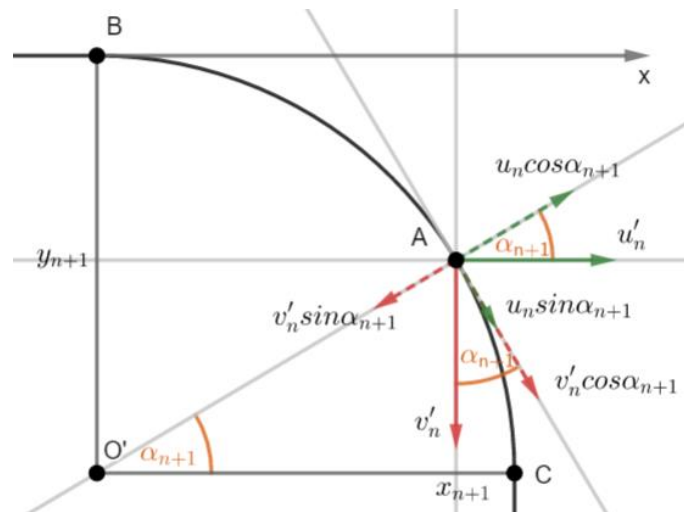
$$u_n' = u_n, \quad v_n' = v_n - gt_n.$$

Ezekből u_{n+1} és v_{n+1} számolása attól függően más, hogy a labda görbült felületre, vagy lapra pattan-e, így a két esetet külön kell tekinteni.

Ha a labda egy lépcsőfok lapjára pattan, vagyis $x_{n+1} \leq L - R$, akkor az ütközési tényezők alapján egyszerűen:

$$u_{n+1} = ju_n', \quad v_{n+1} = -kv_n'. \quad (11)$$

Nézzük ezután a sarokra pattanás esetét, amikor is $x_{n+1} > L - R$. A geometriai elrendezést a 4. ábra mutatja.



4. ábra: A geometriai elrendezés, a becsapódás előtti vízszintes és függőleges sebességkomponensek felbontása sugárirányúra és tangenciálisra. Az ábrán v_n' irányát mutatjuk, de mivel fölfelé vesszük pozitívnak, ezért nagysága negatív.

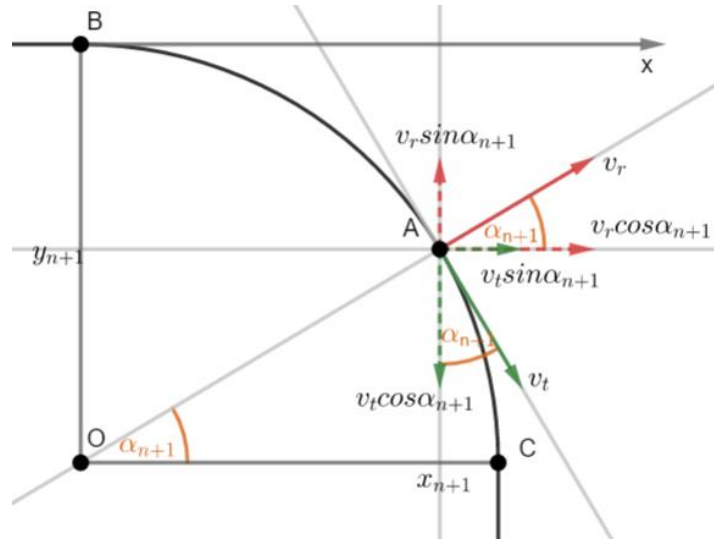
Legyen a leérkező labda az A ponton, legyen O' a sarkot jelentő negyedkörív középpontja, a körív felső és alsó végpontjai rendre B és C. Az AOC szög α_{n+1} az alábbi módon számolható:

$$\alpha_{n+1} = \arccos\left(\frac{x_{n+1} - L + R}{R}\right). \quad (12)$$

Ahhoz, hogy a súrlódási, és ütközési tényezőket megfelelően használjuk, a lepattanás előtti u_n' vízszintesen irányú és v_n' függőleges irányú sebességkomponensek helyett a v_r' sugárirányú, és a v_t' tangenciális komponenseket kell használni. A pozitív irányt felfelé és jobbra vesszük fel, így u_n' pozitív, v_n' negatív értékű. A komponensekre bontás után a sugárirányú sebesség akkor pozitív, ha az origóból kifelé mutat, tangenciális pedig akkor, ha óramutató járásával megegyező. A pattanás akkor történik meg, ha v_r' negatív, a labda mozgási irányából következően v_t' mindig pozitív. A komponensekre bontás elvégzése a 4. ábra alapján:

$$v_r' = v_n' \sin(\alpha_{n+1}) + u_n' \cos(\alpha_{n+1}), \quad v_t' = -v_n' \cos(\alpha_{n+1}) + u_n' \sin(\alpha_{n+1}).$$

Ezekből k és j használatával megkapható a lepattanás utáni sugár, illetve érintő irányú sebesség:



5. ábra: A becsapódás utáni sugárirányú és tangenciális sebességkomponensek visszaalakítása vízszintesre és függőlegesre

$$v_r = -kv_r', \quad v_t = jv_t'.$$

Ezeket a sebességeket az 5. ábra alapján visszaalakíthatjuk vízszintes és függőleges irányúra, megkapva u_{n+1} és v_{n+1} értékeit:

$$u_{n+1} = v_r \cos(\alpha_{n+1}) + v_t \sin(\alpha_{n+1}),$$

$$v_{n+1} = v_r \sin(\alpha_{n+1}) - v_t \cos(\alpha_{n+1}).$$

v_r és v_t értékeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (-kv_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1}) - ku_n' \cos^2(\alpha_{n+1})) \\ &\quad + (ju_n' \sin^2(\alpha_{n+1}) - jv_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})), \\ v_{n+1} &= (-kv_n' \sin^2(\alpha_{n+1}) - ku_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})) \\ &\quad + (jv_n' \cos^2(\alpha_{n+1}) - ju_n' \sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1})). \end{aligned} \tag{13}$$

u_n' és v_n' szerint csoportosítva, és $\sin(\alpha_{n+1}) \cos(\alpha_{n+1}) = \frac{\sin(2\alpha_{n+1})}{2}$ azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n' (j \sin^2(\alpha_{n+1}) - k \cos^2(\alpha_{n+1})) - v_n' \frac{k+j}{2} \sin(2\alpha_{n+1}), \\ v_{n+1} &= -u_n' \frac{k+j}{2} \sin(2\alpha_{n+1}) + v_n' (j \cos^2(\alpha_{n+1}) - k \sin^2(\alpha_{n+1})). \end{aligned}$$

Itt fontos emlékezni, hogy a képletekben v_n' értéke negatív, így könnyen látható, hogy u_{n+1} mindig pozitív lesz.

5. Dimenziótlan alak

A fent megadott képletek átírhatók egyszerűbb alakba is, mely kevesebb változótól függenek, például a lépcső hossza és magassága helyett csak az $m = M/L$ meredekségétől. Ehhez L -lel leosztjuk az összes hosszúság dimenziójú egyenletünket, és az így kapott L -lel osztott hosszparamétereket újradefiniáljuk, mint az L lépcsőfok-hossz egységében mért dimenziótlan távolság. Így a lépcső magassága $m = M/L$, a negyedkörív sugara $r = R/L$ és x_n és y_n is L

egységében van mérve. Hasonlóképpen érdemes sebességegységet is megadni, ehhez u_0 -t választjuk, hiszen így eggyel kevesebb kezdőértéke van a labdának. A fent tárgyalt eljárásnak megfelelően most leosztjuk u_0 -lal a sebesség dimenziójú egyenleteket, vagyis u_n és v_n , és a részeredményként kapott v_n' , v_t stb értékek mind u_0 egységében vannak mérve. Ezekből az is következik, hogy az idő mértékegysége $t_e = L/u_0$. Eddig még nem beszéltünk g -ről, amely szintén egy fontos paraméter. Mivel u_0^2/L gyorsulás mértékegységű, a g -nek megfelelő dimenziótlan mennyiség $H = gL/u_0^2$. Ez u_0 -t is tartalmazza, tehát a vízszintes kezdősebességet is jellemző paraméter. A szemléletes jelentése az, hogy az $r = 0$ esetben a legfelső lépcsőfok sarkából elindulva a következő lépcsőfok hosszának $\sqrt{2m/H}$ -szorosánál pattan le. Ezt az alábbi módon láthatjuk be, a dimenziós írásmóddal kezdve: a lépcsőfok M magasságból a labda $t = \sqrt{2M/g}$ idő alatt esik le, ami alatt u_0 sebességgel $\sqrt{2Mu_0^2/g}$ vízszintes utat tesz meg. Ez a lépcsőfok L hosszának $\sqrt{2Mu_0^2/(gL^2)} = \sqrt{2m/H}$ -szorosa. A később használt $m = 0.5$, $H = 4$ értékekkel a labda pl. a következő lépcsőfok közepénél pattan le, ez a választás, tehát viszonylag kis vízszintes kezdősebességnek felel meg.

Az egész mozgást a

$$k, \quad j, \quad m = \frac{M}{L}, \quad r = \frac{R}{L}, \quad H = \frac{gL}{u_0^2}.$$

paraméterek jellemzik. A lépcső alakját dimenziótlan formában is a 2. ábra adja meg, csak a lépcsőfokok hossza 1, magasságuk m , a görbület sugara r . A (4) kifejezés megfelelője pl. $y(t) = y_n + v_n t_n - \frac{H}{2} t_n^2$, ahol $y_n < r$. A 6. fejezetben bemutatott numerikus szimuláció is ebben a dimenziótlan jelölésben kéri, illetve adja meg az értékeket.

6. Analitikus összefüggések két ütközés közt

Ha a labda két lépcsőfok vízszintes lapja között pattan, akkor egzakt, analitikus összefüggések is felírhatók, s a mozgás ezek alapján követhető, ahogy [2]-ben megmutatták. A lenti számolások elvégzése akkor is segít, ha a labda görbületre esik, hiszen, ahogy látni fogjuk, annyiival kisebb szakaszon kell majd numerikus számolást végezni.

Tekintsünk a vizsgálandó lépcső helyett egy olyat, amely ahhoz mindenben hasonlít, de az alatt a lépcsőfok alatt, melyen az n . pattanás történik, semelyik lépcsőfoknak sincs lekerekítve a sarka, vagyis ott $r = 0$, azaz nem tud görbületre pattanni a labda. Ekkor $y_0(x)$ az alábbi dimenziótlan formára egyszerűsödik:

$$y_0(x) = -mN, \quad \text{ha } N < x \leq N + 1. \quad (14)$$

Ezt minden $N > 1$ egész számra felírjuk, hiszen a 0. lépcsőfokon kívül (amelyikről indul) mindegyik lépcsőfok szögletes.

A számolás megkönnyítésének érdekében tegyük fel, hogy ismerjük $\bar{N}_n$ értékét, ami azt mondja meg, hogy hány szögletes lépcsőfokon repül át a labda az n . pattanás után, és végezzük el ennek alapján a fenti számításokat.

Határozzuk meg a két ütközés között eltelt dimenziótlan időt:

$$y_n + v_n t_n - \frac{H}{2} \bar{t}_n^2 = -m\bar{N}_n. \quad (15)$$

Itt $\bar{t}_n$ a szögletes lejtőhöz tartozó repülési idő. Az y_n mennyiség lehet 0, vagy egy tetszőleges r -nél kisebb abszolút értékű negatív szám is lehet. Ha ez így van, az azt jelenti, hogy az n . pattanás a lekerekített részre esik. Az egyenlet pozitív megoldása:

$$\bar{t}_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n}{H}. \quad (16)$$

ebből a becsapódás előtti függőleges és vízszintes sebesség a szögletes lépcsőn:

$$\bar{v}_n' = v_n - H\bar{t}_n = -\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)}, \quad \bar{u}_n' = u_n \quad (17)$$

Az u_n vízszintes sebességről eddig nem esett szó ebben a fejezetben, de a korábbi megállapítások ugyanúgy érvényesek itt is, nevezetesen, hogy két pattanás között az értéke sosem változik.

Az eltelt idő ismeretében a (3) egyenletből számolható az x koordináta:

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + u_n \bar{t}_n = x_n + \frac{u_n}{H} \left(\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right), \quad (18)$$

ahol $\bar{x}_{n+1}$ az $n+1$. ütközés koordinátája a szögletes lépcsőn.

A dimenziótlanított (9) alapján $\bar{N}_n$ megkapható, mert:

$$\bar{N}_n = \left[x_n + \frac{u_n}{H} \left(\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right) \right]. \quad (19)$$

Az egyenletnek nincsen explicit megoldása, de mivel tudjuk, hogy $\bar{N}_n$ egész, ezért kiértékeljük (18)-at $\bar{N}_n = 1, 2, 3$ stb egész számokra, hogy azonosságot kapunk-e. A legkisebb szám, amely kielégíti az egyenletet, lesz $\bar{N}_n$ megoldás.

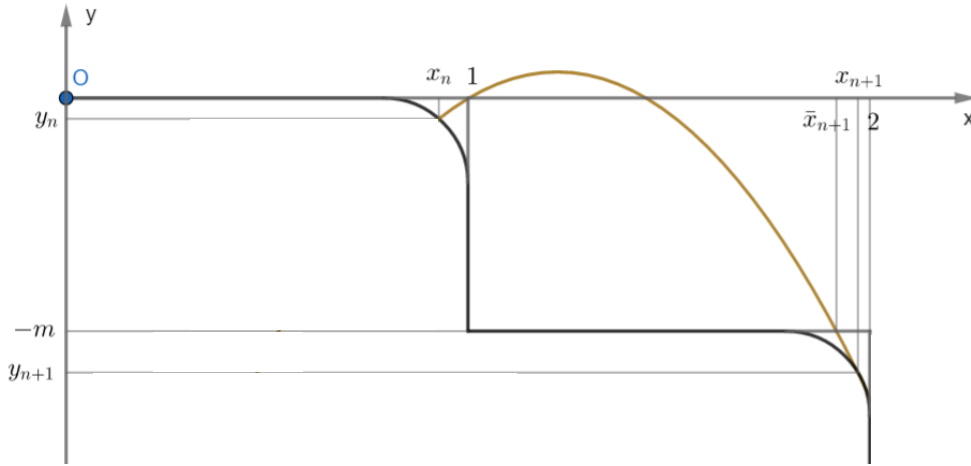
Az új koordinátarendszerbe átlépéshez a (18)-ból számolt értékre elvégezzük a (10)-nek megfelelő transzformációt, ami az

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + \frac{u_n}{H} \left(\sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)} + v_n \right) - \bar{N}_n \quad (20)$$

dimenziótlan alakra vezet. Most már tudjuk, hogy hol pattanna le a labda egy nem lekerekített lépcsőn. A lekerekített lépcső esetén kapott $\bar{x}_{n+1}$ nem feltétlenül egyezik meg a lekerekítetlen lépcsőn érvényes x_{n+1} -gyel, ezt mutatja a 6. ábra.

Ha az adódik, hogy a (20)-ban számolt $\bar{x}_{n+1} < 1 - r$, akkor $\bar{x}_{n+1}$ a tényleges lepattanás helye: $x_{n+1} = \bar{x}_{n+1}$ (és $t_n = \bar{t}_n$, $N_n = \bar{N}_n$). x_{n+1} -re tehát egy zárt képletet kapunk, amely az n . lepattanás adataiból megadja az $n+1$. pattanás adatait. Egyben $y_{n+1} = 0$, hiszen lapra pattant a labda. A (16)-ból kifejezett lepattanás előtti sebességeket behelyettesítve (11)-be megkapjuk az $n+1$. sebességeket is:

$$(21)$$



6. ábra: $\bar{x}_{n+1}$ és x_{n+1} nem feltétlenül egyezik meg, $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$ esetén $\bar{x}_{n+1} < x_{n+1}$

$$v_{n+1} = k \sqrt{v_n^2 + 2H(m\bar{N}_n + y_n)}, \quad u_{n+1} = ju_n$$

Ha (18)-ban számolt $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$, akkor nem tudunk zárt, analitikus képleteket adni, így numerikus módszerrel határozzuk meg a labda lepattanás utáni adatait.

7. Numerikus algoritmus

Az analitikus összefüggések segíthetnek, de nem tudnak minden esetben megoldást nyújtani. Ha a labda görbültre pattan, akkor mindenképpen kell numerikus számolást végezni. A labda pályájának és lépcső alakjának viszonyától függően három esetet különítünk el: ha a labda azon a lépcsőfokon pattan le, amelyikre az 6. fejezetben meghatározott $\bar{x}_{n+1}$ kerül, ha a labda egy másik lépcsőfokon pattan le, mint amelyikre meghatároztuk $\bar{x}_{n+1}$ értékét, illetve, ha a labda egy lépcsőfokról ugyanannak a lépcsőfoknak a görbületére pattan. Az első két esetben így is segítenek az analitikus összefüggések, hiszen nekik köszönhetően rövidebb szakaszon kell numerikus számolást végezni, csak az elképzelt, szögletes lépcső lapjai és a valódi görbült felületek között. A harmadik esetben viszont a következő lepattanás adatai meghatározására teljes mértékben numerikus számolásra kell hagyatkoznunk.

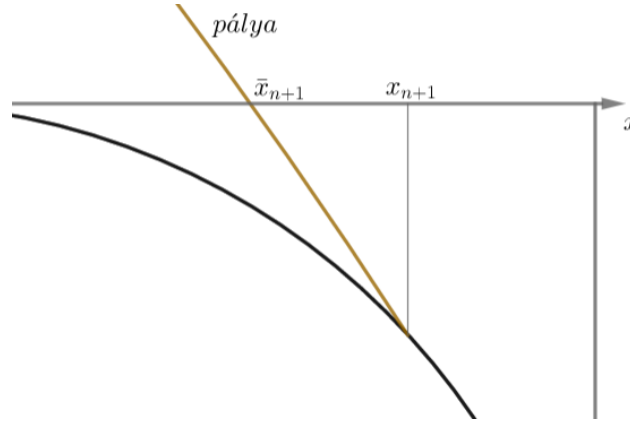
A) A labda ugyanazon a lépcsőfokon pattan először, ahol szögletes lépcső esetén

Ez az eset akkor állhat fent, ha miután elvégeztük az analitikus számolást, és már áttértünk az új koordináta-rendszerbe (hiszen $\bar{x}_{n+1}$ -re vonatkozóan (20)-ban már elvégeztük az ehhez szükséges, (10)-nek megfelelő transzformációt, $\bar{y}_{n+1}$ értéke pedig az új koordináta-rendszerben definíció szerint 0), azt kaptuk, hogy $\bar{x}_{n+1} > 1 - r$. A labda pályáját, tehát az $(\bar{x}_{n+1}, 0)$ helytől az (x_{n+1}, y_{n+1}) helyig kell vizsgálnunk. Azt az esetet nézzük, ahol mindeközben a labda nem pattant át egy másik lépcsőre, vagyis a vizsgált szakaszon $N = 0$. Ekkor $\bar{x}_{n+1}$ és x_{n+1} viszonyát a 7. ábra mutatja.

Vizsgáljuk a labda lépcső feletti magasságát egy adott időpillanatban, mégpedig úgy hogy a (7)-ben számolt $(\bar{x}_{n+1}, 0)$ helyen érvényes sebességeket tekintjük kezdősebességekként, és ezekből képezzük a $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$ mennyiséget, ahol t az $(\bar{x}_{n+1}, 0)$ helyzetből való elindulása óta eltelt időt jelöli.

$x(t)$ a megfelelő mennyiségek behelyettesítésével, (3) alapján:

(22)



7. ábra: $\bar{x}_{n+1}$ és x_{n+1} koordináták viszonya, ha a labda az $\bar{x}_{n+1}$ -hez tartozó lépcsőfokra pattan le. A fekete színnel jelöltük a lépcső görbületét, szürkével a képzeletben kiegészített szögletes lépcsőfokot.

$$x(t) = \bar{x}_{n+1} + u_n t.$$

Az $y(t)$ koordináta, (4) alapján, a v sebesség helyére a (17)-ben számolt $\bar{v}_n'$ értéket helyettesítve, az $\bar{y}_{n+1} = 0$ szinttől mérve:

$$y(t) = \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2. \quad (23)$$

Mivel $1 - r < \bar{x}_{n+1} < 1$, és az (5)-ben szereplő N értéke definíció szerint 0:

$$y_0(t) = -r + \sqrt{r^2 - (1 - r + \bar{x}_{n+1} + u_n t)^2}. \quad (24)$$

Ebből a $\Delta y(t)$ függvény:

$$\Delta y(t) = \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2 + r - \sqrt{r^2 - (1 - r + \bar{x}_{n+1} + u_n t)^2}. \quad (25)$$

Ennek a függvénynek az értéke addig pozitív, amíg a labda a lépcső felett van, és amikor előjelet vált, akkor történik a visszapattanás.

Az algoritmus ennek a függvénynek az értékét képezi a $t = 0, dt, 2dt$ stb. pillanatokban, ahol dt egy kis időlépés. Az utolsó beviteli értéket, amire még pozitív a függvény értéke, nevezzük T -nek. Ha elegendően kicsinek választjuk meg dt értékét, akkor $x(T) \approx x_{n+1}$ és $y(T) \approx y_{n+1}$, vagyis (22) és (23) jó közelítéssel megadják a következő pattanás helykoordinátáit.

Ha megtaláltuk a labda x_{n+1} és y_{n+1} koordinátáit, akkor először a becsapódási sebességeket számoljuk ki. Tudva, hogy az $(\bar{x}_{n+1}, 0)$ helyen a sebességkomponensek a (18) szerint számolható $\bar{v}_n'$ és $\bar{u}_n'$ értékek, illetve, hogy azóta T idő telt el, a becsapódási sebességek:

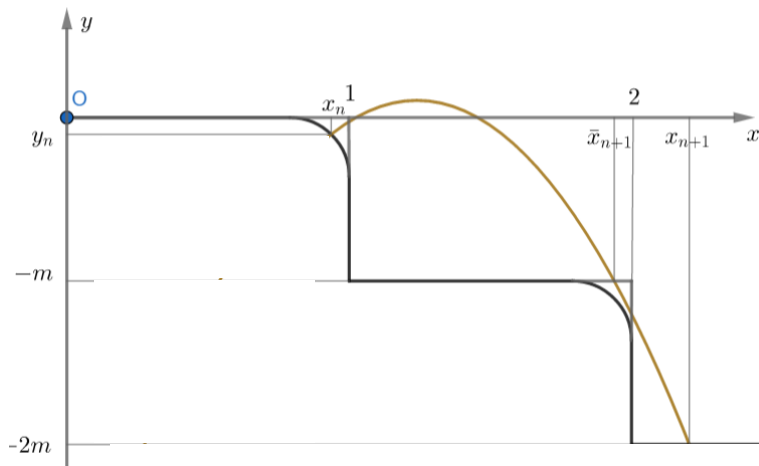
$$v_n' = \bar{v}_n' - HT, \quad u_n' = \bar{u}_n' = u_n$$

lesznek. Ezeket az értékeket (14)-be helyettesítve (mely ugyanilyen alakú a dimenziótlan írásmódban is) megkapjuk a visszapattanás utáni v_{n+1} és u_{n+1} sebességértékeket.

B) A labda másik lépcsőfokon pattan le, mint szögletes lépcső esetén

Előfordulhat, hogy (19) ad egy $\bar{N}_n$ -t, ahol lepattanna szögletes lépcső esetén, de a labda éppen elrepülne a lekerekített rész felett. Egy ilyen esetet mutat a 8. ábra. Ezt úgy

küszöbölhetjük ki, hogy először áttérünk az új koordináta-rendszerbe, (mely a kiszámolt $\bar{x}_{n+1}$ értékhez tartozik,) aztán a numerikus algoritmussal, amely a (25)-ben számolt $\Delta y(t)$ érték előjelét vizsgálja különböző t időpillanatokra, ugyanarra az időpillanatokra a (22)-ben számolt $x(t)$ értékét is ellenőrizzük, és ha ez az érték meghaladja az egyet, akkor $\bar{N}_n$ értékét eggyel növeljük, hiszen még egy lépcsőfok felett átrepült. A növelt érték szinte mindig már a valódi N_n , de ha kell, a (19) egyenletbe tovább helyettesítjük az $\bar{N}_n$ értékeket, amíg meg nem találjuk a megoldást (ez csak nagyon ritkán szükséges). Innen a leírtak szerint folytatjuk a számolást, az újonnan kapott $\bar{N}_n$ értékkel elvégezzük a (22)-(25) számolásokat, majd az új $\bar{x}_{n+1}$ értékének megfelelően az előző fejezet vége, vagy a jelenlegi fejezet tartalma szerint megkaphatjuk x_{n+1} koordinátát is.



8. ábra: Előfordulhat, hogy $\bar{x}_{n+1}$ meghatározása nem azon a lépcsőfokon történik, ahol a labda ténylegesen leesik.

C) A labda lépcsőfok átugrása nélkül görbületre pattan

Mivel az analitikus összefüggések fejezetben a (14) egyenletben szereplő N -t 1-nél nagyobbak definiáltuk, nem néztük meg azt az esetet, amikor a labda arra a lépcsőfokra pattan,

ahonnan indult. (Ha a lépcső lapos részéről indulva teszi ezt, akkor felírhatjuk (14)-(20) összefüggéseket $\bar{N}_n = 0$ esetben is, ilyenkor a B) és C) részekhez hasonlóan segítségünkre lesz az analitikus számolás, majd a B)-ben tárgyalt módon numerikusan meghatározhatók a következő lepattanás adatai.)

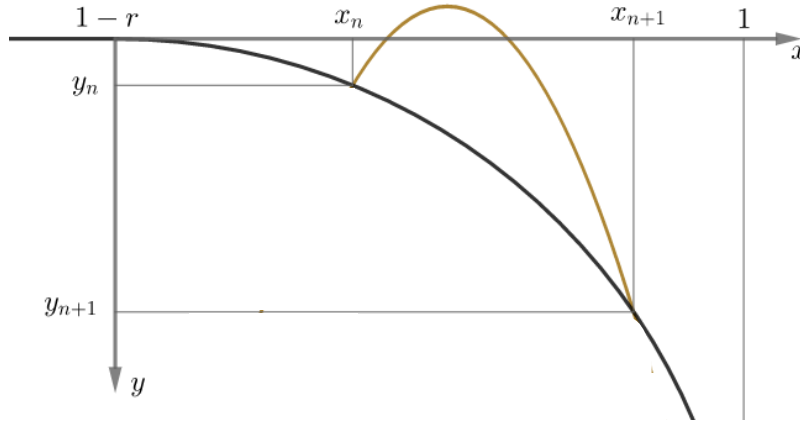
Ha a labda görbült felületről indul és lépcsőfok átugrása nélkül ugyanarra a görbületre pattan (9. ábra), akkor a pattanás egészében a numerikus számolásra kell hagyatkoznunk. Itt a labda már az n . lepattanáshoz tartozó koordináta-rendszerben van, tehát az (x_n, y_n) helyről indult u_n és v_n sebességgel, és természetesen az $\bar{N}_n = 0$ esetet vizsgáljuk. Ennek megfelelően kicsit módosítani kell a (22)-(25) összefüggéseket.

A pálya $x(t)$ koordinátája az x_n, u_n kezdeti adatokkal:

$$x(t) = x_n + u_n t.$$

Az $y(t)$ koordináta meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a labda y_n helyről indult, illetve, hogy v_n volt a kezdősebessége:

(26)



9. ábra: Lehetséges, hogy a labda egy görbületről indulva ugyanarra a görbületre érkezik vissza. Ilyenkor nem kaphatunk $\bar{x}_{n+1}$ -et, és pusztán numerikus módszerekkel jellemezzük a pattanást.

$$y(t) = y_n + v_n t - \frac{H}{2} t^2.$$

$y_0(t)$ számolásánál újra csak a korábbi $\bar{x}_{n+1}$ értéket kell az itteni x_n kezdőértékre cserélni:

$$y_0(t) = -r + \sqrt{r^2 - (1 - r + x_n + u_n t)^2}. \quad (28)$$

Visszahelyettesítve a $t = 0$ esetet, látható, hogy $y_0(0)$ -ra (6)-nak megfelelő alakot kapunk, visszakapva y_n -t.

Ezekből a módosult $\Delta y(t)$ függvény:

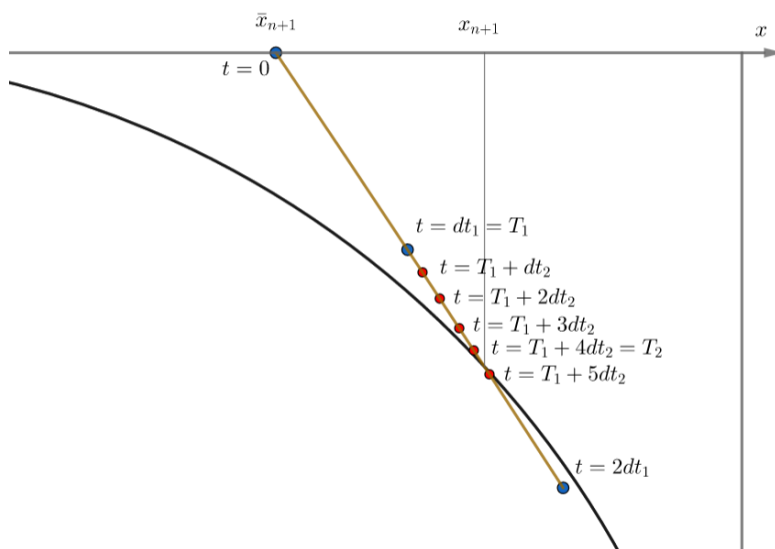
$$\Delta y(t) = y_n + \bar{v}_n' t - \frac{H}{2} t^2 + r - \sqrt{r^2 - (1 - r + x_n + u_n t)^2}. \quad (29)$$

Ilyenkor tehát a numerikus algoritmust a (29) függvényre kell elvégeznünk, amelyre az ugyanúgy működik, mint a B)-ben tárgyalt esetre.

D) A numerikus algoritmus pontosítása

A módszert a B)-ben tárgyalt esetre mutatjuk be. Minél kisebbnek választjuk dt -t, annál pontosabb a közelítés, viszont ezzel megnő a számításigény. Ahhoz, hogy a gép gyorsan és pontosan végezze el a számolást, menet közben változtathatjuk dt értékét, és az egyre kisebb dt időlépéseknek megfelelően egyre pontosabb T értéket kapunk. Nevezzük az először választott dt értéket dt_1 -nek, és az ezzel kapott T értéket T_1 -nek. Miután megtaláltuk T_1 értékét, az elsőre megválasztott dt_1 segítségével, akkor csökkentjük dt_1 értékét a tized részére, megkapva ezzel dt_2 -t, és vizsgáljuk meg a függvényt a $t = T_1, T_1 + dt_2, T_1 + 2dt_2$ stb pillanatokban, amíg meg nem találjuk az így képzett legnagyobb t értéket, amelyre $\Delta y(t)$ még pozitív, ez legyen T_2 . (T_1 -nél kisebb időpillanatokot felesleges megvizsgálni, hiszen tudjuk, hogy T_1 pillanatban $\Delta y(t)$ még pozitív.) Ezután újra csökkenthetjük dt értékét, dt_2 -ről annak tizedére, dt_3 -ra és így tovább. Így kellően kevés idő alatt megfelelően pontos a numerikus számolás, az így kapott T_n értékre mondhatjuk, hogy $x(T_n) = x_{n+1}$ és $y(T_n) = y_{n+1}$. A szimulációnkban dt_1 értékét a dimenziótlan időegység egy ezerötöd részének választjuk (néhány lépcsőfok nagyságú pattanás általában egy nagyságrendű dimenziótlan időt vesz igénybe), és $n=11$ -ig folytatjuk az algoritmust, így numerikus pontosságunk 10^{-14}

nagysárendű. Erre a nagy pontosságra azért van szükség, mert a görbület szóró tükörként működik, kaotikus viselkedést okoz, s káoszban a hibák feleződnek [3,4].



10. ábra: A finomodó algoritmus szemléltetése a numerikus szakaszon $n = 2$ -ig, a lépcső görbületére ránagyítva. Először balról jobbra a kék pontokat követjük, majd sorban a pirosakat. Az algoritmus meghatározza a labda lepattanásának x_{n+1} helyét.

Az algoritmus jobb megértése érdekében gondoljuk el, hogy különböző időpontokban meghatározzuk a labda helyét, és megpróbáljuk kitalálni, hogy melyik pillanatban lesz éppen ott, ahol ütközik. Először megnézzük $t = 0$ -ra, (ekkor a B)-ben és C)-ben tárgyalt esetben $\bar{x}_{n+1}$ helyen, míg a D)-ben tárgyalt esetben x_n helyen van,) majd dt_1 időközönként. Ha dt_1 nagy, akkor néhány lépés után (a 9. ábrán két lépés után) jutunk az ütközési ponton túlra. Ekkor visszatérünk az eggyel korábbi időpillanatra, amit T_1 -nek hívunk, és onnan számolunk tovább, az eredeti dt_1 helyett, egy finomabb, dt_2 időközt használva. Ezt is addig adjuk hozzá az eltelt időhöz, amíg egyszer csak átlépünk az ütközési ponton, és előjelet vált Δy , és megint visszatérünk az eggyel korábbi, T_2 -nek nevezett időpillanathoz, és újra finomítunk dt -n. Az algoritmus a kívánt pontosság eléréséig folytatódik, az utoljára vizsgált hely, amely a T_n időpillanathoz tartozik, a labda lepattanásának x_{n+1} koordinátája, míg az y_{n+1} koordinátát az $y(T_n)$ függvényérték adja meg. Ezt a gondolatot szemlélteti a 10. ábra.

E) A szimulációnk nyelve és környezete

Szimulációnk Java nyelven íródott, egy processing nevű környezetben [5]. Azért esett erre a választásunk, mert ez egy felhasználóbarát szoftver, mely a grafikus ábrázolást nagyban megkönnyíti.

Felhasználóbarát volta már a működésén meglátszik. Az ebben a környezetben írt programok alapja egy draw() nevű függvény, mely automatikusan meghívódik minden frameben (ez általában másodpercenként hatvanat jelent, de természetesen állítható), így lehetővé téve ismétlődő, egymáshoz hasonló számolások gyors, egymás utáni elvégzését (a mi esetünkben a labda n . adataiból az $n+1$. adatainak kiszámolását) úgy, hogy mindeközben output kiadására (például a labda pályájának rajzolása, vagy egy függvény pontjainak kijelölése) és input befogadására (például kattintás érzékelése) is képes. Ehhez más környezetben külön függvények megírása lenne szükséges, ráadásul arra figyelve, hogy ezek a függvények egyszerre fussanak, de mégse zavarják egymást. A processing ezt automatikusan kezeli.

A felület másik előnye a grafikai ábrázolásokban rejlik. Számtalan beépített függvény segíti az esztétikus kirajzolást, és egyszerűen elérhető még a 3D ábrázolás is (bár ez nekünk most nem szükséges). A szakaszok, körívek, pontok, háromszögek, ellipszisek és még sok más alakzat kirajzolására megtalálható beépített függvény, és a vonalak vastagsága, színe, az alakzatok kitöltése, illetve a betűk színe, mérete és betűtípusa is egyszerűen állítható, s ezek következtében kitűnő választás szimulációk írására és prezentálására is.

A mutatott képek felbontása változó, de mindegyiknek legalább 640×390 pixeles. A későbbi fázistereken x pontossága három tizedesjegyre, v pontossága 2 tizedesjegyre terjed. A szimulációban double típusú változókat (64 bit) és egy Jasmine nevű számolást sebességét gyorsító könyvtárat használtunk [6], ami azért is szükséges volt, mert a Processing egy nagy hátránya, hogy double típusú változókkal csak alapműveleteket tud végezni. A számábrázolás pontossága mindent összevetve a numerikus számolás 10^{-14} -es pontosságával egyezik meg. A szimulációról és felhasználói felületéről részletesen a 3. függelékben írunk.

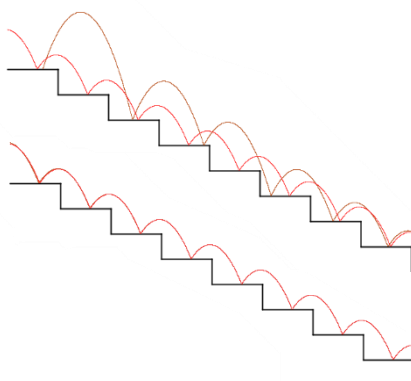
8. Eredmények

A) A görbület hatása

$r = 0$ határesetben [2] cikk szerint elég nagy k értékekre a labda előbb-utóbb egy állandósult mozgást végez lefelé. Ez k -tól függően lehet periodikus és kváziperiodikus is. Először a periodikus, majd a kváziperiodikus esetet vizsgáljuk. Ahhoz, hogy a lehető legjobban bemutathassuk a kontrasztot a szögletes, és a görbülettel rendelkező lépcső között, a lehetőségek szerint a többi adatot a [2]-ben vizsgált eseteknek megfelelően vesszük fel, éppen ezért először mindent a $j = 1$ esetben vizsgálunk, a többi standard érték: $H = 4$ és $m = 0.5$ és $v_0 = 3$, ha nem írunk mást, ezek az érvényesek.

Mivel nem feltétlenül pattan görbületre a labda, és így nem feltétlenül lesz hatása a görbület jelenlétének, ezért sokszor mégis meg kell változtatnunk valamit. Mivel x_0 értéke a cikk eredményei szerint a szögletes lépcsőnél nem befolyásolja a hosszú idejű mozgás jellegét, ezért erre esett a választásunk.

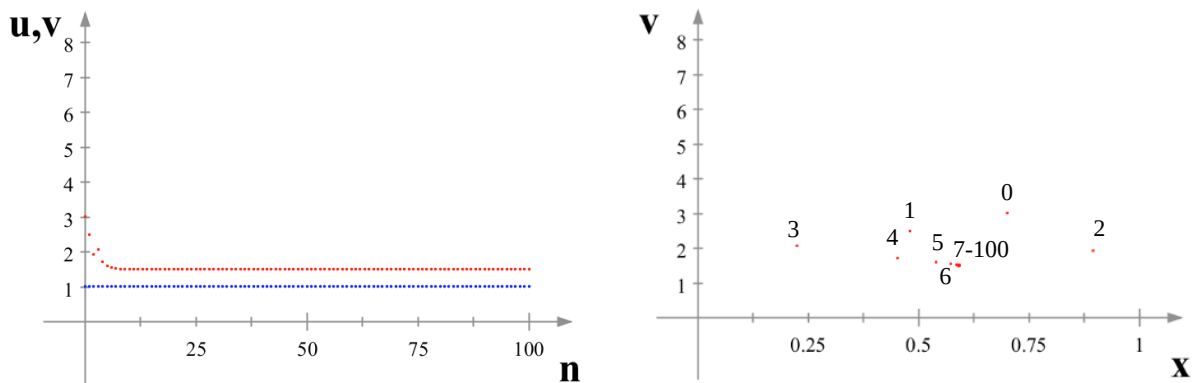
I) Periodikus pattogás



11. ábra: A labda pattogása a szögletes lépcsőn ($r = 0$,) $k = 0.6$, $j = 1$ ütközési együtthatókkal $H = 4$ és $m = 0.5$ -re $x_0 = 0.7$ és $v_0 = 3$ kezdőfeltételekkel (aranszínű vonal). Az alsó lépcsősoron a labda pályájának folytatása látható. A piros vonal a labda állandósult mozgását mutatja. Amint látható a 6. pattanás után már nem különíthető el a két vonal, vagyis beáll az állandósult mozgás.

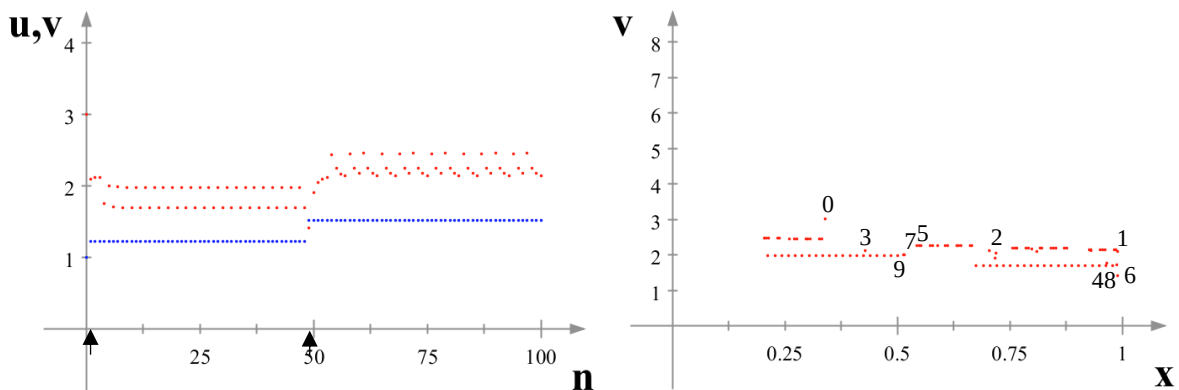
$r = 0$ -ra különböző, diszkrét k értékekre fordulhat csak elő teljesen periodikus pattogás, mi ezek közül a legegyszerűbbet, a mindig egy lépcsőfokot átugró mozgást nézzük, mely $k = 0,6$ esetén fordul elő, ekkor viszont a kezdőértékektől függetlenül. Nézzük meg először ebben az esetben a labda mozgását, ezt mutatja a 11. ábra.

A periodikus mozgás néhány pattanás után beáll, ekkor a v_n sebesség, és a lepattanás x_n helye is állandósul, ezt mutatják 12. ábrán az egyes lepattanásokhoz tartozó sebességkomponensek, illetve a mozgás fázistérét mutató diagramm. A fázistér nem más, mint az egyes pattanások x_n és v_n adatainak egy diagrammon történő ábrázolása. Mivel $j = 1$, ezért a vízszintes sebesség konstans, $u_n = 1$, hiszen az u_0 vízszintes kezdősebességgel dimenziótlanítottunk.



12. ábra: A lepattanásokhoz tartozó sebességkomponensek (a kék szín a vízszintes, u , a piros szín a függőleges, v sebességkomponenst jelöli) a lepattanás sorszámának függvényében az első 100 pattanásig (bal oldal), és a mozgás fázistere (csak a függőleges sebességkomponensre), az egyes pontok felett a lepattanás sorszáma (jobb oldal). A mozgás periodikusságára az utal, hogy a 7. ütközéstől kezdve a hely-sebesség számpár állandóan ismétlődik. Az erre a mozgásra (és további mozgásokra) vonatkozó lépcsőszám-ütközésszám függvényt ($N - n$) az 1) függelékben adjuk meg

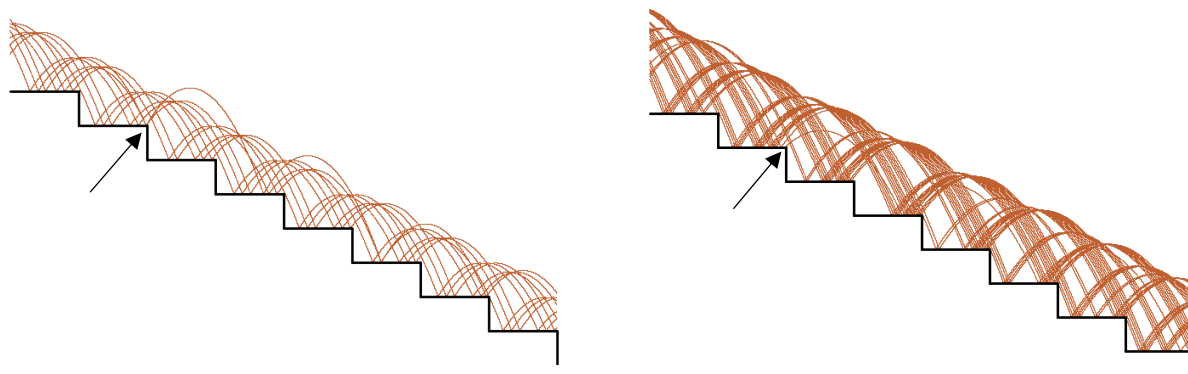
Nézzük meg hogyan változnak a 12. ábrán látható diagrammok, ha a lépcsőfokokat egy kis, $r = 0.01$ sugarú görbülettel lekerekítjük. Akkor van értelme ezt új esetként vizsgálnunk, ha a labda az első néhány száz ütközés alatt le is pattan a görbületre, ami csak bizonyos kezdőértékekre történik meg. Az általunk vizsgált $v_0 = 3$ esetben mindössze ötféle ilyen x_0



13. ábra: A 12. ábra diagrammjai $r = 0.01$ esetben, $x_0 = 0.339$ kezdeti koordinátával. Minden görbületre pattanáskor u_n értéke növekszik (kék görbe). Látható ennek alapján, hogy az első, és a 49. ütközéskor is görbületre pattant a labda (ezeket a pillanatokat nyilak jelzik), a növekedést pedig néhány pattanás alatt v_n is megteszi. A fázistéren az első néhány ütközést beszámoltuk. A labda végül 272 pattanás után elrepül.

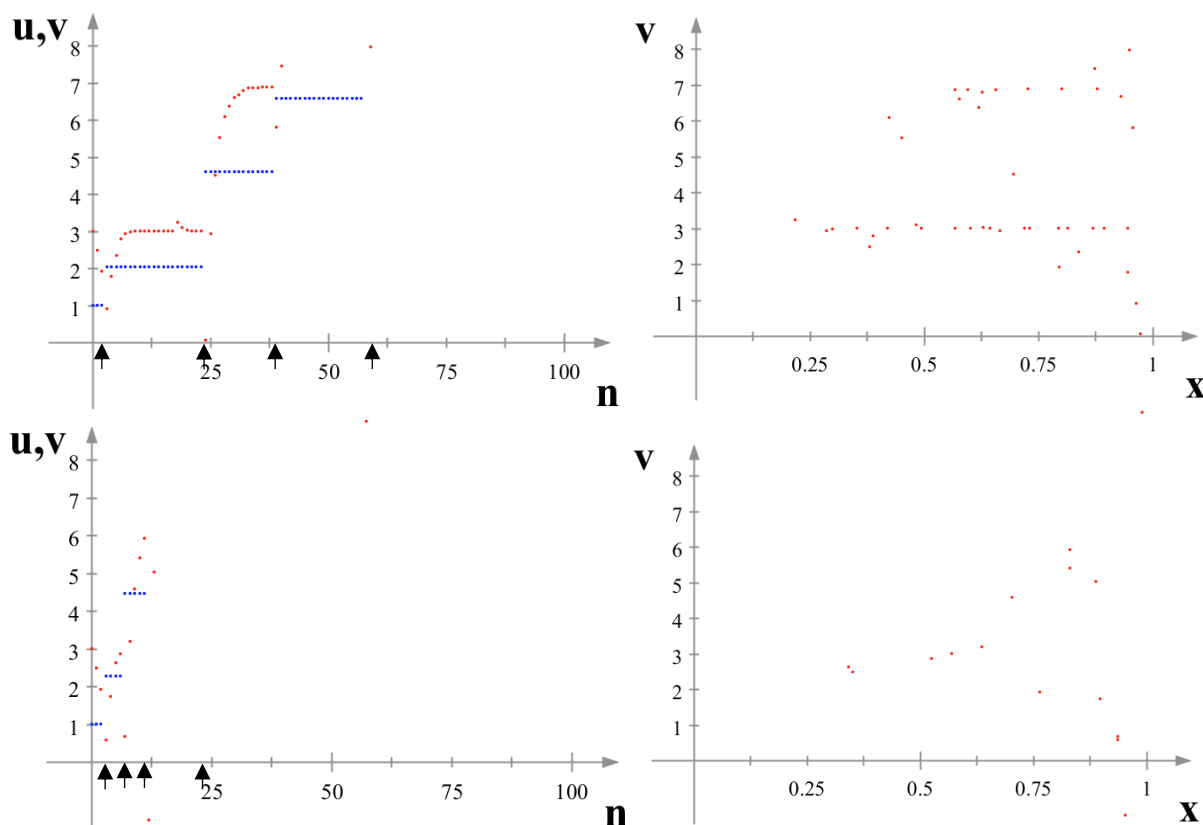
koordinátát találtunk, vagyis csak öt kis intervallumban lévő x_0 ad számunkra érdekes eredményt. Ha az $n+1$. pattanás során először pattan a labda görbületre, akkor az egyes pattanásokhoz tartozó vízszintes sebességkomponensekre: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1 < u_{n+1}$, vagyis a vízszintes sebesség megnő, ugyanis a pattanás helyén a görbület egy jobbra lejtő síknak tekinthető, erre pattanva jobbra mutató impulzusvektort szerez. A vízszintes sebesség növekedését a vízszintes ütközési együttható hiányában semmi sem mérsékli, így a görbületre pattanások során egyre nagyobb sebességre tesz szert, és egyre több lépcsőt ugrik át.

Amikor egyetlen pattanás során legalább 100 lépcsőfokot ugrik át a labda, azt mondjuk „elrepült”, hiszen ezután nem valószínű a mozgás, és nincs értelme vizsgálni. Ekkor ugyanis modellünk érvényessége már kétséges, hiszen a sebesség is nagy, s a légellenállás nem hanyagolható el, márpedig mi parabolapályákkal számoltunk. A 13. ábra egy görbülettel rendelkező lépcsőfokok esetében kialakuló diagrammokat mutat. Érdekes hangsúlyozni, hogy a sebességnövekedés nem csak a vízszintes, de a függőleges komponens is érint. Ez látszik is az ábrán, hogy az u_n növekedését v_n mindig követi. Fontos észrevenni, hogy már ilyen kis görbület bevezetése esetén is ennyit változik a mozgás jellege: az $u_n \equiv 1$ görbétől jelentős az eltérés, és az (x, v) síkon is sokkal kiterjedtebb az alakzat, mint $r = 0$ esetén. Érdekes kérdés, hogy mit is jelent ez a pályájának a tekintetében. A labda a görbületre pattanás után néhány pattanással, már nagyobb vízszintes és nagyobb függőleges irányú sebességgel rendelkezik, vagyis valamilyen értelemben egy magasabb energiaszintre lépett. Ezt a pályájának módosulása is kitűnően mutatja: 14. ábrán ábrázoljuk 1. és 2. görbületre pattanás között, illetve a 2. és 3. görbületre pattanás között a mozgásának pályáját (a 3. pattanás a 151. ütközéskor történik meg). Azért esett a választásunk erre a 2. görbületre pattanásra, mert a kritikus pattanás előtt, és után is sokáig pattogott a labda görbület beavatkozása nélkül. Az ábrán az látszik, hogy a nagyobb mozgási energiája miatt a ferde hajításnak megfelelően megnövekedik a legnagyobb magassága is. Az is észrevehető, hogy ez nem azonnal történik, csak néhány pattanás után áll be a magasabb energiaszintre, ezzel egybevágunk a 13. és 14. ábrákkal kapcsolatos megfigyeléseink.



14. ábra: A görbületre pattanások hatása a labda mozgásának alakjára (a labda minden rajzon a 8. lépcsőfokon áthaladva a 0. lépcsőfokhoz kerül). A bal oldalon az 1. ütközéstől a 49. ütközésig, a jobb oldalon a 49. ütközéstől a 151. ütközésig látható a labda pályája (a 49. ütközés helyét mindkét ábrán egy nyíl jelzi).

Minél gyakrabban pattan sarokra a labda, annál gyakrabban növekszik a sebessége. Ennél fogva nagyobb r értékekre gyorsabb növekedés várható és hamarabb elrepül a labda. $r = 0.05$ és $r = 0.1$ esetekben kialakuló mozgás adatait mutatják a 15. ábra diagrammjai. Látható, hogy a sugár növekedésével az elrepülésig tartó idő lecsökkent.

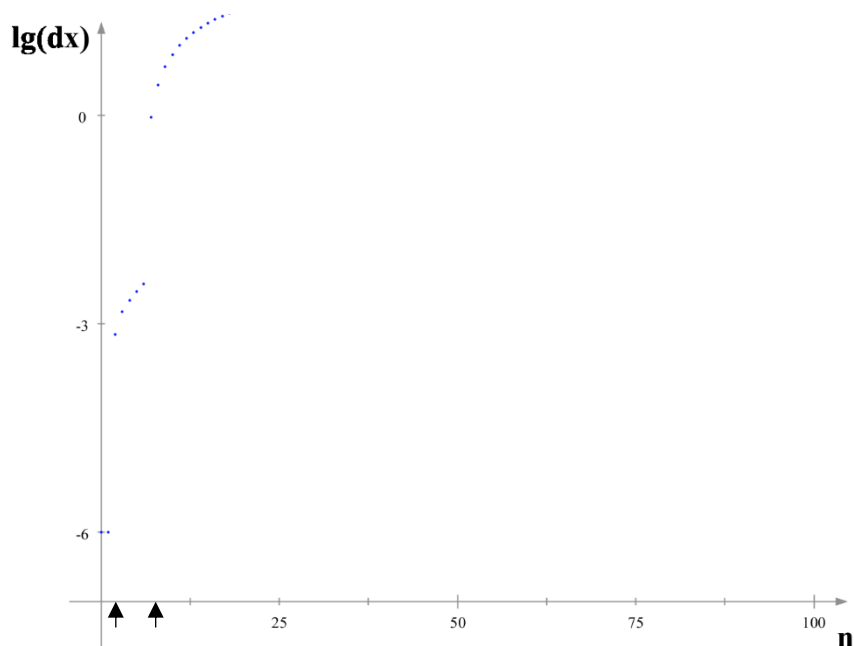


15. ábra: A 13. ábra diagrammjai az $r=0.05$ és $r=0.1$ esetekben, $x_0=0.6$ és $x_0=0.56$ kezdeti koordinátával (piros a függőleges, kék a vízszintes irányú sebesség). Látható, hogy ahogy a görbület sugara nő, egyre gyakrabban pattan rá a labda, és ezzel együtt egyre gyorsabban nő a sebessége. A labda előbbi esetben 59, míg utóbbi esetben 24 pattanás után

Nézzük meg hogy találunk-e káoszra utaló jeleket már az $r=0.01$ sugarú görbület hozzáadásával. Ehhez indítsunk el két labdát azonos sebességgel, egymástól 10^{-6} távolságra, és figyeljük, hogyan változik a két labda $dx(n)$ távolsága a pattanások során. Kaotikus folyamatoknál a $dx(n)$ függvény exponenciálisan nő [3,4], vagyis $\lg(dx(n))$ lineárisan nő ($\lg$ a tízes alapú logaritmust jelöli). A 13. ábrának megfelelő pattogás mentén érvényes $\lg(dx(n))$ függvényt mutatja a 16. ábra.

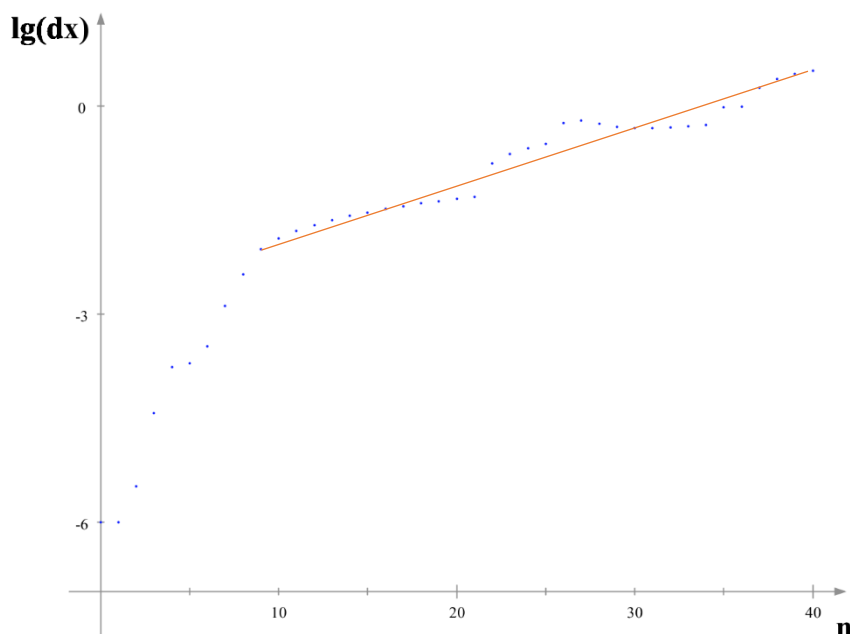
A grafikonon az látszik, hogy amint görbületre pattannak, a következő ütközésre a labdák sokat távolodnak egymástól. Azt is vegyük észre, hogy a 6. pattanás után is nőtt a távolság, pedig a 15. ábrán itt nem láttunk sarokra pattanást. Ez azért történt, mert a másik, az eredetitől 10^{-6} távolságra elhelyezett labda rápattant egy sarokra, amit az első csak megközelített. Mindkét megfigyelés a görbület szóró tulajdonságát mutatja, ami kis szórófelületként erősen szór. A görbület miatti hirtelen növekedés után általában egy egyre lassuló növekedés veszi kezdetét. Néha, a megfigyeléseink alapján az is előfordul, hogy véletlenül lecsökken a távolság, de ez mindig csak egyszeri esemény, a következő pattanásnál újra folytatja a növekedését.

Minél nagyobb a két labda távolsága, annál valószínűbb, hogy a 6. pattanás után talált esemény előfordul. Ilyenkor már nem lehet azt mondani, hogy két közeli mozgást ábrázolunk, mert a két mozgásnak jóformán már semmi köze egymáshoz. Csak addig van értelme a grafikont vizsgálni, amíg még összetartoznak a labdák, éppen ezért az ilyen grafikonokat csak $\lg(dx) = 0$ értékig figyeljük, tehát, amíg egy lépcsőfoknál kisebb a két labda távolsága.



16. ábra: A távolság növekedése az $r = 0.01$ esetben: az $x_0 = 0.339$ kezdeti koordinátáról, és a tőle 10^{-6} távolságra elindított labdák $\lg(dx)$ távolsága az ütközések függvényében. Görbületre pattanások után hirtelen növekedés látható a függvényben, amely aztán egyre lassul. Összehasonlításként megjegyezzük, hogy a szögletes lépcső esetén ez a mennyiség nem változik, végig a -6 értéket veszi fel.

Az ábrán látható hirtelen kiugrások miatt nehezen mondható lineárisnak a függvény, ezért megnéztük az 5 szignifikánsan különböző kezdőértékre, és az egyes pattanásokra kapott $\lg(dx)$ értékeket átlagoltuk, és ábrázoltuk a 17. ábrán. Itt már tagadhatatlan a linearitás, az illeszkedő

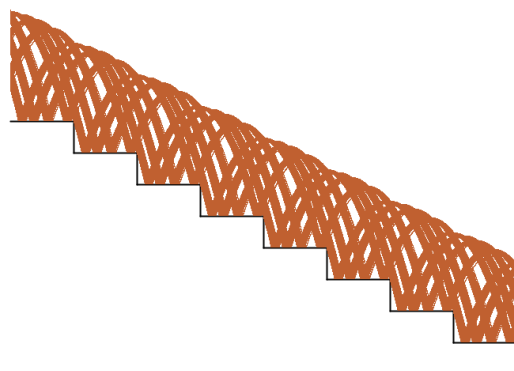


17. ábra: $r = 0.01$ esetben, $x_0 = 0.067, 0.339, 0.53, 0.631, 0.798$ kezdeti koordinátákról, és a tőlük 10^{-6} távolságra elindított labdák távolságának az átlaga az idő függvényében. A függvény az elején nagyon meredek, hiszen az összes vizsgált labda ilyenkor szinte egyszerre pattan görbületre. Ennek lecsengése után a függvényre 0.22 meredekségű egyenes illeszthető.

egyenes meredeksége $\lambda = 0.22$ /ütközés. Kaotikus mozgásra jellemző, hogy az ún. Ljapunov exponensük [3,4] pozitív. A Ljapunov exponens az $\lg(dx(n))$ mennyiségek átlaga nagy számú kezdőfeltételt vizsgálva. Ha ez a feltétel nálunk még nem is teljesül, a vizsgált néhány kezdőfeltételre átlagolt Ljapunov exponens szerű mennyiség pozitív, azaz a káoszra utaló tulajdonságok már $r = 0.01$ esetén is megjelennek, éles ellentétben a szögletes lépcső esetével, ahol $\lambda = 0$. Mindez összhangban van azzal, hogy a fázistéren szétszórt pontthalmaz jelenik meg a 13. ábra jobb oldali képén, ami a kaotikus mozgások egy másik jellemzője.

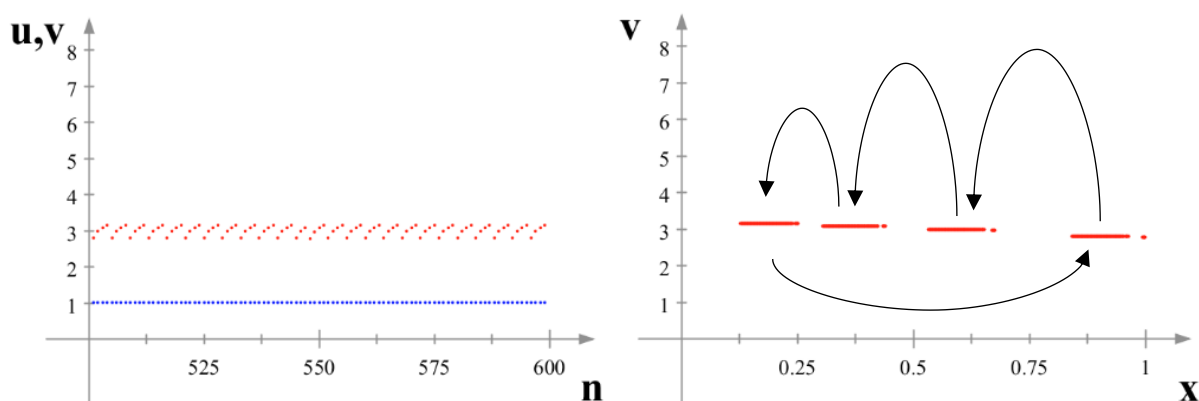
II) Kváziperiodikus pattogás

A kváziperiodikus mozgás olyan mozgás, mely nagyon hasonlít egy periodikus mozgásra, de a sebesség és a helykoordináták egy kicsit változnak, „nem sikerül” mindig ugyanúgy visszatérni a pattogásnak. Éppen ezért a 11. ábrán látható pirossal jelölt periodikus mozgás nem jön létre, az állandósult mozgás ehelyett bizonyos sávokban mozog. Ez látható a 18. ábrán.



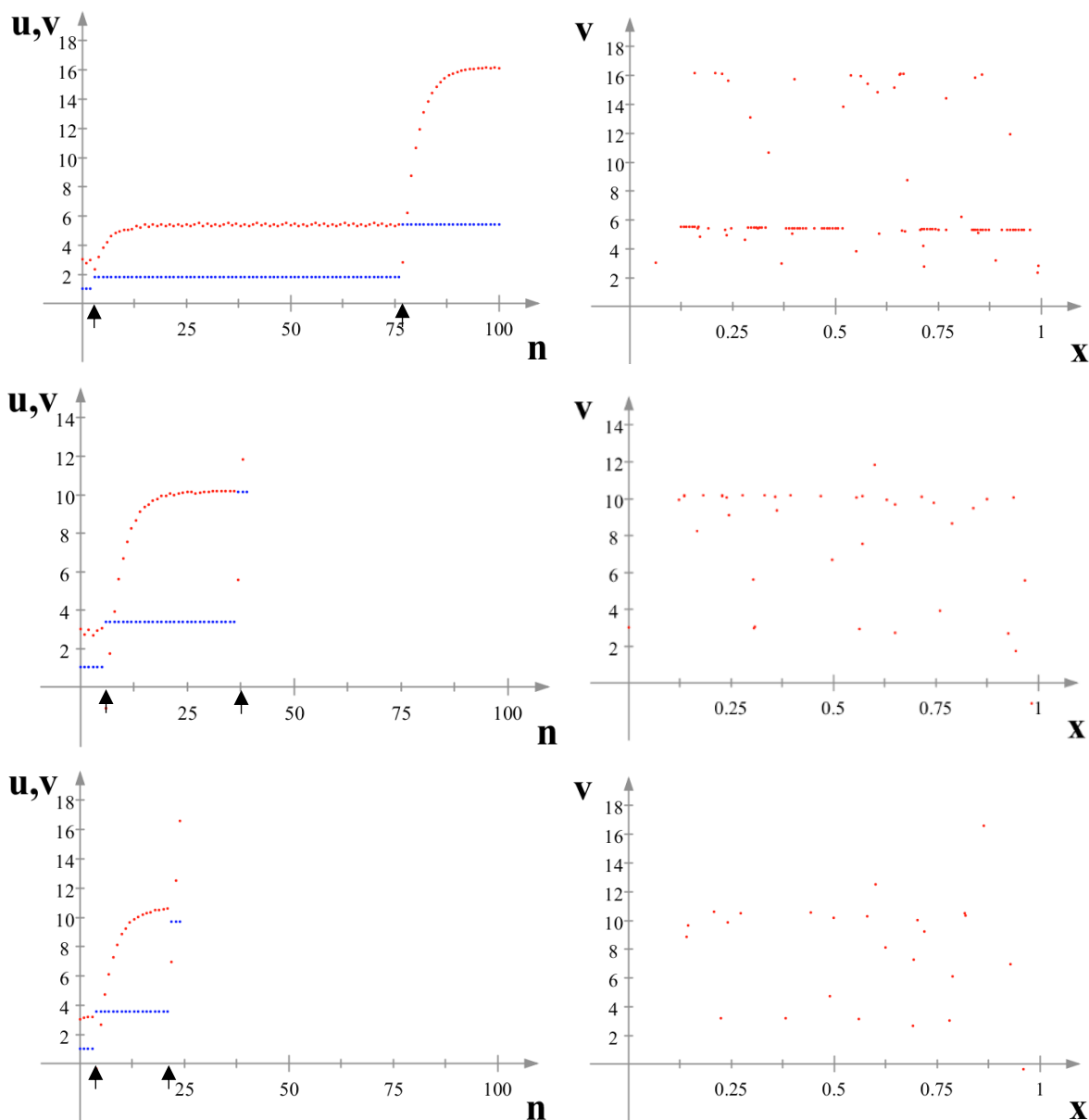
18. ábra: A kváziperiodikus mozgás pályájának képe $k = 0.75$ -re a szögletes lépcsőn $x_0 = 0.7$ koordinátáról indulva (a labda a 8. lépcsőt elhagyva itt is a nulladik fölé kerül). Az első néhány, még nem állandósult ütközés kiiktatása céljából az első 500 pattanás után következő 1000 pattanást ábrázoltuk.

Szögletes lépcsőn a periodikusságot jelentő kivételes, diszkrét k értékeket kivéve mindig kváziperiodikus pattogás jön létre. Mi a [2]-ben is tanulmányozott $k = 0.75$ esetet vizsgáljuk. Amint látható, egymáshoz hasonló pattanások történnek, de nem mindig ugyanott, illetve nem mindig ugyanakkora sebességgel. Ennek megfelelően egyszerű szabályszerűség figyelhető meg a mozgás diagrammjain (19. ábra).



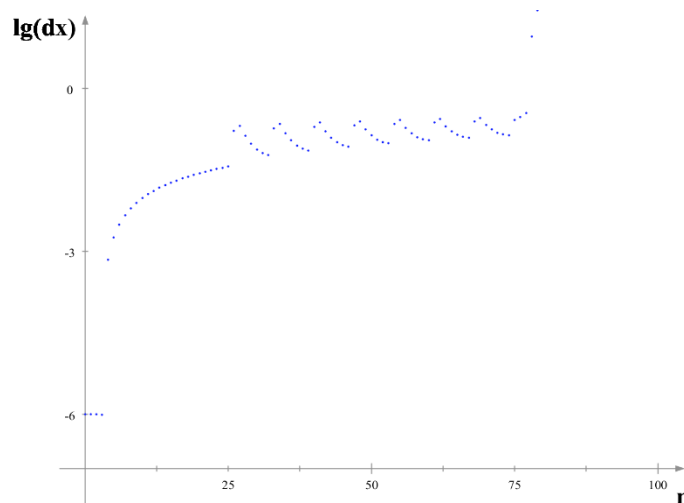
19. ábra: Az előző ábra kváziperiodikus mozgásának sebesség-idő diagrammja és fázistere. Egyforma ismétlődő pattanást jellemző értékek helyett hasonló, de kicsit eltérő értékeket vesz fel, így a fázistéren szakaszok láthatók. A labda a szakaszokhoz a nyilakkal megadott sorrendben ad hozzá új pontokat.

Ahogy hozzáadjuk a görbületet, a periodikus esethez hasonlóan a labda egyre nagyobb vízszintes sebességre tesz szert, ha görbületre pattan, és ugyanúgy hamar elrepülhet. Az az egyetlen különbség, hogy a periodikus esetben esetleges a görbületre pattanás, és csak bizonyos kezdőértékre történik meg véges időn belül, itt a pattogás során a tapasztalat szerint mindig felvesz 1-hez közeli x_n értéket, így kezdőértéktől függetlenül érvényesül a görbület hatása. Ennek ellenére itt is különböző x_0 értékeket vizsgálunk, mert szeretnénk, ha viszonylag hamar láthatnánk az első görbületre pattanást, ne kelljen 100 ütközést várni. A periodikussággal való hasonlóság miatt egy ábrán ábrázoltuk az $r = 0.01$, $r = 0.05$ és az $r = 0.1$ eseteket (20. ábra).



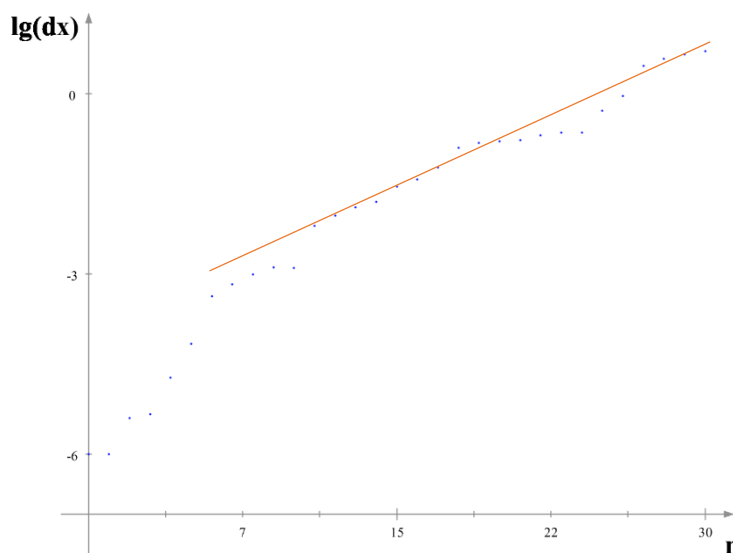
20. ábra: Sebesség-idő diagrammok és fázisterek az $r = 0.01$, $r = 0.05$, és $r = 0.1$ esetekben, $x_0 = 0.064$, $x_0 = 0.0$ illetve $x_0 = 0.78$ kezdő koordinátákra. Olyan kezdeti értékeket választottunk, amikre viszonylag hamar pattan görbületre a labda (első esetben 3., második esetben 6., harmadik esetben 4. ütközés során, a görbületre pattanásokat nyilak jelölik). Az első esetben a labda 155, a másodikban 39, a harmadikban 24 ütközés után repül el.

A 21. ábrán ábrázoltuk a két közel indított labda távolságának logaritmusát a pattanás számának függvényében. A 16. ábrához nagyon hasonló ábrákat kapunk, ami arra utal, hogy a görbületre pattanás a gyors távolodás eredete. A hasonlóság megfigyelhető az energiavesztés időfüggésén is, ahogy ezt a 2. függelékben mutatjuk.



21. ábra: $r = 0.01$ esetben, $x_0 = 0.064$ kezdeti koordinátáról induló mozgás (20. ábra első sor), és a tőle 10^{-6} távolságra elindított másik labda távolsága az ütközések száma függvényében. A 16. ábrával nagy hasonlóság látható.

Még jobban látszik a hasonlóság, ha a periodikus esetnek megfelelően itt is vizsgálunk 5 szignifikánsan különböző esetet is, melyek az első néhány ütközés egyikében görbületre pattannak, s ezeket kiátlagolva kapjuk a 22. ábrát. Az erre a függvényre illesztett egyenes meredeksége szintén $\lambda = 0.22$.



22. ábra: $r = 0.01$ esetben, $x_0 = 0.064, 0.339, 0.53, 0.818, 0.96$ kezdeti koordinátákról, és a tőlük 10^{-6} távolságra elindított labdák távolságának az átlaga az idő függvényében. A függvényre 0.22 meredekségű egyenes illeszthető.

Azt látjuk tehát, hogy már a legkisebb görbület bevezetése is káosz-szerű tulajdonságok megjelenésére vezet, melyeket a pozitív Ljapunov-exponens és a fázistérbeli pontok szétszórt elhelyezkedése mutat, még ha egyelőre csak gyorsan elrepülő eseteket találunk is csak.

B) Érintőirányú ütközési együttható hatása

A görbület hozzáadásával azt láttuk, hogy mikor a labda görbületre pattan, nagyobb sebességre tesz szert, és, mivel ezt semmi sem mérsékli, egy idő után elrepül, ami nem valószínű. Ennek elkerülése végett bevezetjük az érintőirányú ütközési együtthatót. A célunk az, hogy minél több ideig mozogjon a labda valószínű sebességgel, és így minél több ideig megfigyelhessük. Ahhoz, hogy minél jobban, és gyakrabban látható legyen a görbület hatása, általában az $r = 0.1$ sugarú görbülettel foglalkozunk.

I) Érintőirányú ütközési együttható csak a görbületen

Ahogy bevezettük a görbületet, logikus, hogy először csak a görbülethez adunk érintőirányú ütközési tényezőt, ezáltal valamilyen módon képet kapunk arról, hogy mennyi energiát kell elvonnunk a labdától, hogy kiegyensúlyozzuk a görbület gyorsító hatását. A csak a görbületen jelenlévő ütközési együttható azt a hatást írja le pontszerű modellünkben, hogy a valódi labda odapattanva jobban megpördül, és így több haladó mozgási energiát veszít.

Azáltal, hogy beleépítünk még egy energiaveszteségi lehetőséget, megtörténhet, hogy a labda olyan mértékben lelassul, hogy már nincs értelme a mozgását vizsgálni. Először arra gondoltunk, hogy hagyjuk abba a labda vizsgálatát, ha a vízszintes és függőleges irányú sebességek négyzetösszege kicsi, de végül úgy döntöttünk, hogy külön bármelyik sebességkomponens kis abszolút értéke esetén leállítjuk a szimulációt. Ennek oka, hogy sem a csupán vízszintes irányú csúszással, sem a csupán függőleges irányú fel-le pattogással nem kívánunk foglalkozni. Természetesen, ha a labda görbületre pattan, akkor a pattanást követően lehet kis abszolút értékű függőleges sebessége, ami a következő pattanásnál megnő, így ilyenkor tovább vizsgáljuk a labdát. Tehát akkor mondjuk egy labdára, hogy az n . pattanáskor megállt, amikor:

- a) $|v_n| < 0.01$ és $x_n < 1 - r$, vagy
- b) $|u_n| < 0.01$.

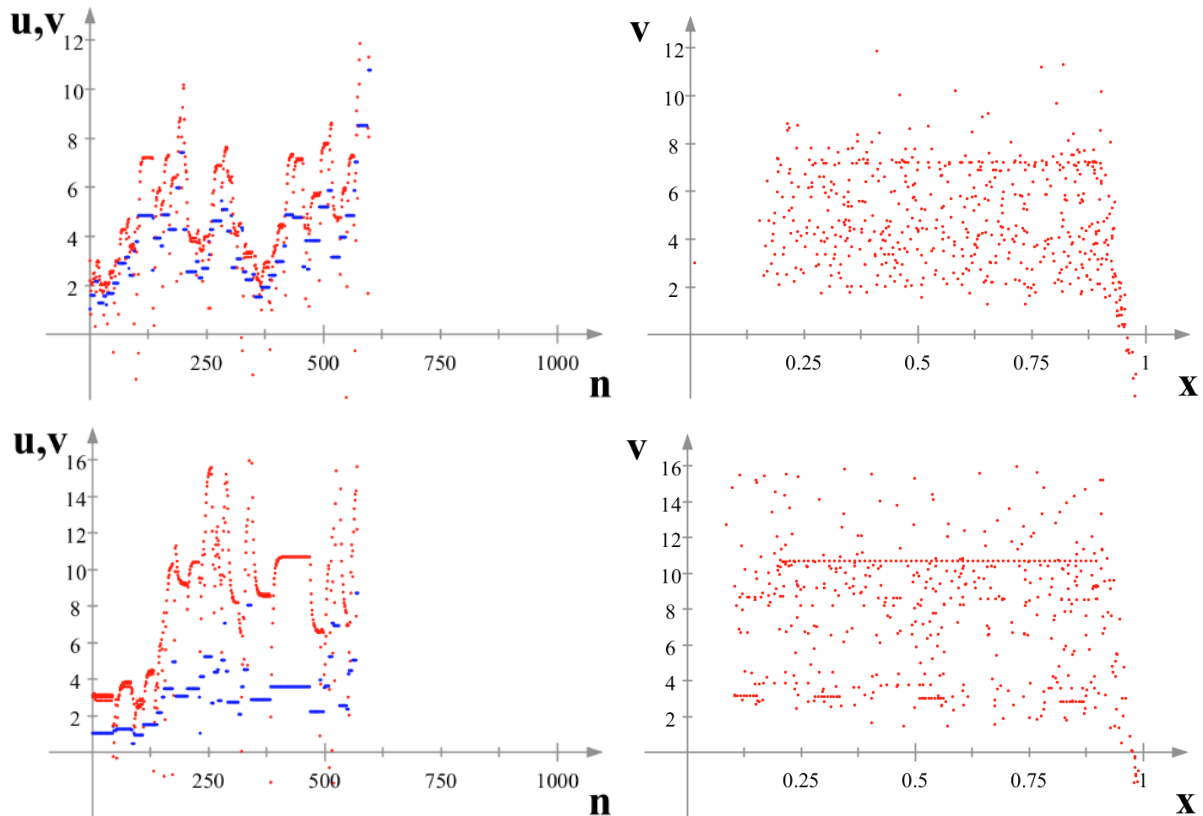
Meg kell jegyeznünk, hogy a megállás fizikailag reális folyamat, és a modellünk is jól le tudja írni, így nem olyan mértékű probléma, mint az elrepülés. Ennek ellenére ilyenkor már biztosan nem kaotikus a rendszer, tehát a dolgozat tárgyának szempontjából fölösleges tovább vizsgálni.

Érdemes definiálnunk egy új változót, ez pedig a mozgás τ élettartama. Ez az ütközések száma a labda indulástól addig, amíg vizsgáljuk, vagyis a megállásáig vagy elrepüléséig. Minél tovább tudunk vizsgálni egy rendszert, annál jobb, így tehát nagyobb élettartamú mozgásokat keresünk.

A hosszú élettartam eléréséhez a j -nek nevezett görbületi érintőirányú ütközési együttható értékét tehát óvatosan kell megválasztanunk, hiszen, ha túl kicsi, és így túl sok energiát von el, akkor a labda megáll, míg ha túl nagy, akkor nem vonunk el elég energiát ahhoz, hogy megállítsuk a repülést. Így tehát j értékét finomhangolni kell, ha a labda megáll, akkor növelve, ha elrepül akkor csökkentve. Mivel a határ általában nem éles, és előfordulhat, hogy kisebb értékeknél is elrepül, illetve nagyobb értékeknél is megáll, ezért nehéz olyan j értéket találni ami tényleges határt képez. Mindemelllett a görbület hozzáadásával a rendszer nagyon érzékeny lett a kezdőfeltételre amit a két esetben a 18. illetve a 23. ábra mutat. Ezek miatt nehéz olyan értéket is találni, amire a labda több mint ötszázat pattog, de a finomhangolással elérhető egy magas (sok kezdőértékre vett) átlagos élettartam. Ennek elérésén kívül az is fontos, hogy sok

kezdőértékre megnézve az elrepülő, és megálló labdák száma közelítőleg megegyezzen. E két szempont alapján három jegy pontosságig a $k = 0.75$ -re a legjobb érték $j = 0.262$. Itt az átlagos élettartam 147 pattanás, és az elrepülő és megálló labdák aránya a vizsgált 100 kezdőértékre 53:47. A legnagyobb élettartamú mozgást mégsem az ekkora ütközési tényezőnél találtuk.

A legnagyobb élettartamú mozgások, a $k = 0.6$ és $k = 0.75$ esetben $r = 0.1$ sugarú görbületre 600 és 572 pattanásig jutottak el. Ezeknek a sebesség-idő diagrammjaikat és a fázisterüket a 23. ábrán mutatjuk. A kétféle k értékre újfent hasonló jellegű diagrammokat kapunk.



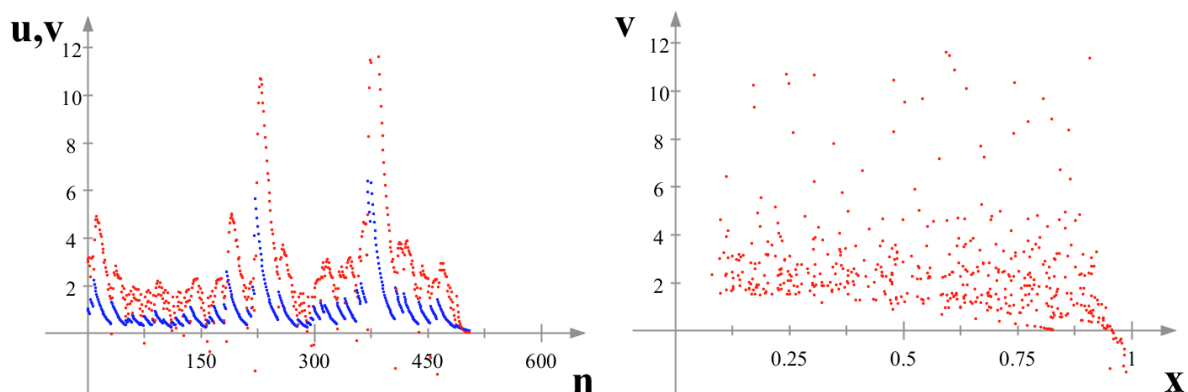
23. ábra: sebesség-idő diagrammok és fázisterek $k=0.6$ esetben (felül) és $k=0.75$ esetben (alul), előbbinél $x_0=0.01$ és $j=0.51$, az élettartama pedig $\tau=600$, utóbbinál $x_0=0.962$ és $j=0.282$, az élettartama $\tau=572$ (továbbra is a piros szín a függőleges, míg a kék a vízszintes sebességet jelöli).

II) Közös érintőirányú együttható

Másképp is tekinthetünk az érintőirányú ütközési együtthatóra; az a labda és a lépcső anyagi minőségétől függ, tehát a lépcsőn mindenhol ugyanannyi. Ez azt jelenti hogy a korábban csak a görbületen vett együttható a lapos részen is érvényessé válik. Mivel ez még nagyobb energiavesztéséget jelent, ezért j korábbi értékét drasztikusan növelni kell a hosszú élettartam eléréséhez.

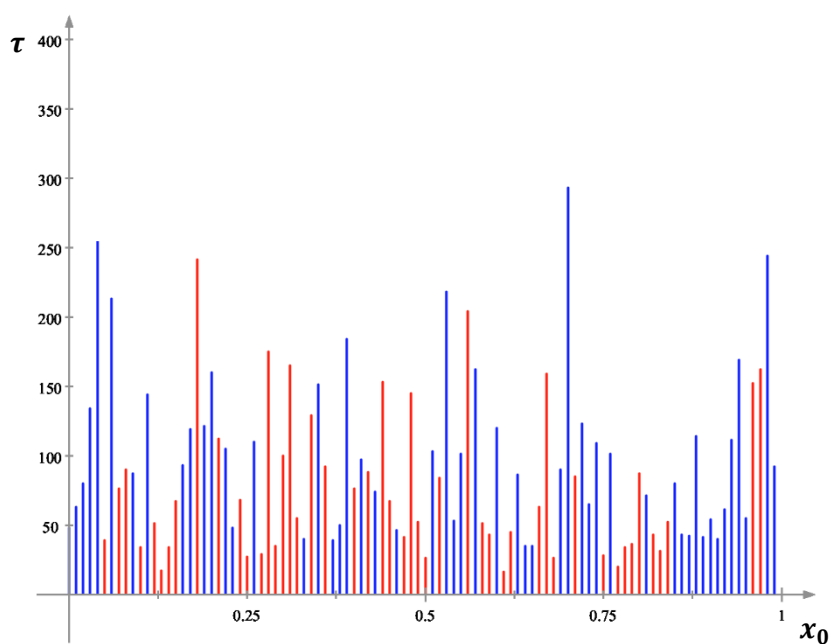
Káosz szempontjából ennek a változatnak az az előnye a korábbihoz képest, hogy azt látjuk, hogy u_n és v_n is minden ütközésnél megváltozik, ezért itt periodikus, és kváziperiodikus mozgás rövid ideig sem alakulhat ki. A 24. ábrán bemutatjuk egy ilyen pattogás diagrammait. A sebesség-idő diagrammon láthatjuk, hogy amikor egy ideig nem pattan görbületre a labda (az $r=0$ -ra u_n esetében konstans, v_n esetében néhány közeli érték közötti fluktuáló függvényei

helyett, lásd 20. ábra) a sebességek gyors csökkenése látható. Ennek oka, hogy ilyenkor u_n exponenciálisan csökken (mindig j -szeresére), és v_n pedig, mint a korábban is látható volt, követi u_n változását. Ezzel a fázisdiagrammokon is megszűnnek az egybefüggő vonalak.



24. ábra: Sebesség-idő diagramm és fázistér $k=0.75$, $j=0.926$ ütközési együtthatókkal, $x_0=0.736$ kezdőhelyről. A labda 505 pattanás után megáll.

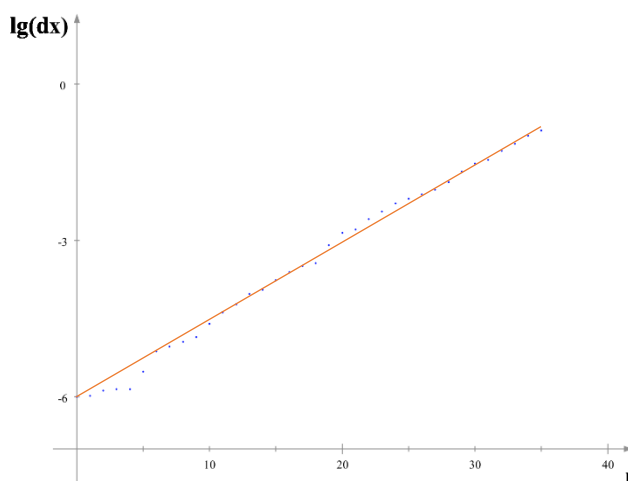
Az egész lépcsőfokon értelmezett j esetén is nehéz meghatározni az optimális értékét. A görbületi érintőirányú ütközési együtthatóhoz leírt eljárás alapján a három tizedesjegyre kapott legjobb érték $j = 0.926$. A 25. ábrán ábrázoltuk a különböző kezdőhelyű labdák élettartamát. Érdekes megfigyelni, hogy nem fedezhető fel egyszerű szabályszerűség a függvényen, ami újabb jele a kaoszra jellemző kezdőértéktől való erős függésnek.



25. ábra: Az élettartam különböző kezdőhelyekre $k=0.75$ és $j=0.926$ -ra, $r=0.1$ ($v_0=3$) esetén. A piros szín a labda elrepülését, a kék a megállását jelenti, ezek aránya 48:52. Az átlagos élettartam 91 ütközés.

Az átlagos élettartam 91 lett, mely szignifikánsan kevesebb, mint a csak görbületen értelmezett érintőirányú ütközési együtthatóval rendelkező esetre kapott átlagértéknek. Tehát, megszabadultunk ugyan a kváziperiodikusságra emlékeztető részekről a sebesség-idő diagrammon és a fázistéren, de nagyban lecsökkent az átlagos élettartam.

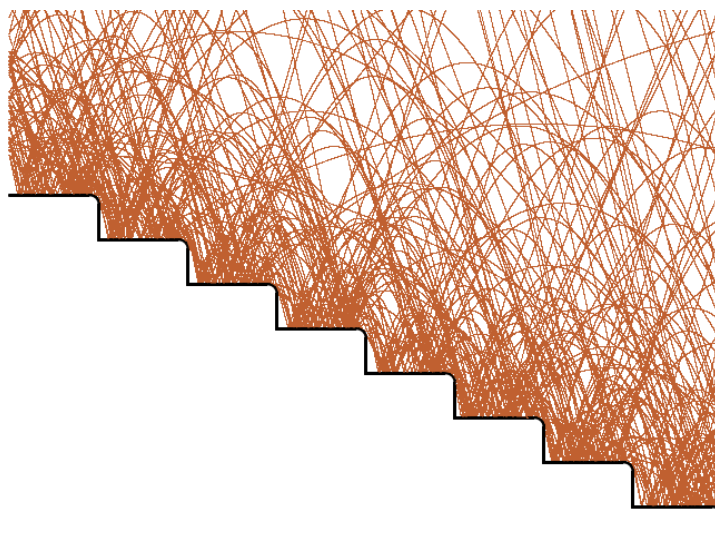
A mozgás kaotikus jellegét láthatjuk két közel indított labda távolsága logaritmusának időfüggéséből. A 26. ábrán bemutatott diagramm 20 véletlenszerűen kiválasztott x_0 kezdőértékre kapott értékek átlagaként jött létre. A függvény lineáris, az illeszkedő egyenes meredeksége $\lambda = 0.22$.



26. ábra: $j = 0.926$, $k = 0.75$ ütközési együtthatójú lépcsőn 20 véletlenszerű kezdőhelyű labda, és a tőlük 10^{-6} távolságra lévő labda közötti távolságok logaritmusának átlaga az idő függvényében. A függvényre illeszkedő egyenes meredeksége 0.22.

Érdemes külön figyelmet szentelni a $j = k$ esetre is, hiszen ekkor csak egyetlen ütközési együttható szükséges. A közös értékre k -ként hivatkozunk. k értékét j -hez hasonlóan finomhangolni kell, ennek eredményeképpen három tizedesjegyre a legjobb érték: 0.842.

A 18. ábrához hasonlóan most is ábrázoljuk a labda pályájának a képét, 24. ábrán tárgyalt esetre. A kapott rajzot a 27. ábra mutatja. Itt már nem láthatóak mindig kihagyott sávok, az 505 pattanás alatt a lépcső közelében a labda pályája szinte teljesen befesti az ábrát, és így sokkal rendezetlenebb, mint a 14. vagy 18. ábrán.



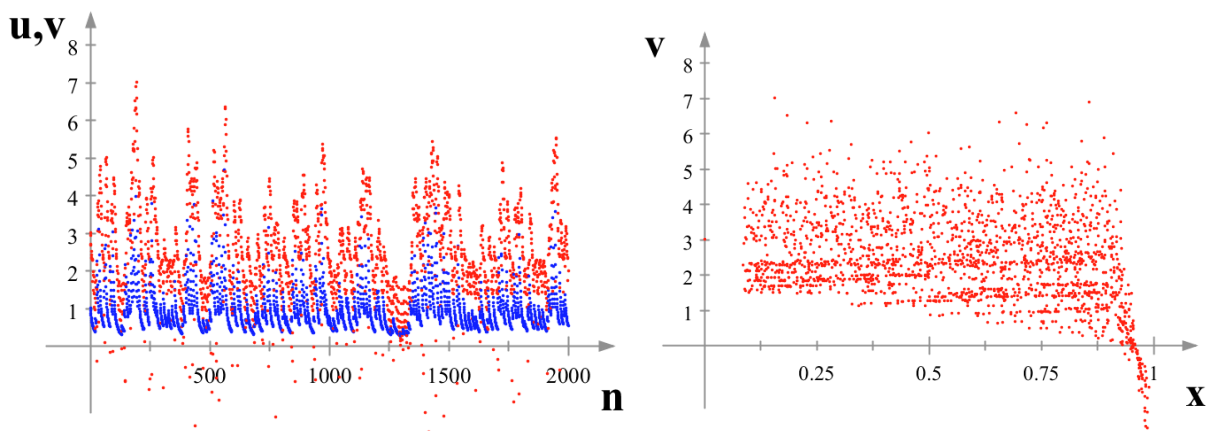
27. ábra: A 24. ábra adataival elindított labda pályájának a képe a teljes élettartama alatt. A labda akár 20-30 lépcsőfokkal a lépcsősor fölé is felpattanhat, s az áttekinthetőség kedvéért csak 3-11 lépcsőfok magasságban mutatjuk a pálya képét.

III) Sebességfüggő ütközési együtthatók

I) és II) esetekben is azt láttuk, hogy a labda élettartama túl rövid, nem elegendő a kaosz tulajdonságainak pontos tanulmányozásához. Emögött az áll, hogy túl nagy sebességű ugrások jönnek létre. Ezt a problémát orvosolja utolsó vizsgált modell-változatunk, a sebességfüggő ütközési együtthatók modellje. Ez azon alapul, hogy egy apró gumilabda, amikor kicsiket pattog, akkor mozgási energiája nagy részét visszanyeri az ütközések során de, ha nagy sebességgel ütközik, akkor több energia disszipálódik deformáció, és hőképződés miatt. Legyen tehát j sebességfüggő, amit sokféleképpen elő lehet idézni, de mi az egyszerűség kedvéért olyan úgy, hogy, ha u érintőirányú sebességgel érkezik le a labda, akkor

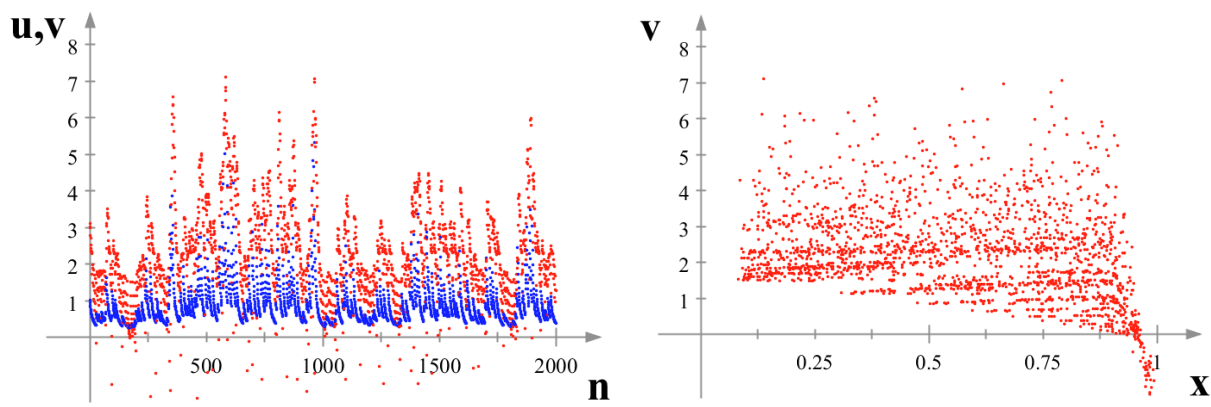
$$j(v) = j_0 e^{-\beta u} \quad (30)$$

alakban írható fel, ahol j_0 és β pozitív kezdőparaméterek, amiket úgy szeretnénk megválasztani, hogy a labda semmilyen körülmény között se álljon meg vagy repüljön el. Ezzel a megnövelt disszipációval áttételesen a legellenállás hatását is figyelembe vesszük. Amikor $u \ll 1$, akkor $j \approx j_0$, tehát visszkapjuk az eddigi eseteket. A j_0 paraméter mellett egy másikat, a β -t is bevezettük. Ennek a paraméternek csak nagy érintőirányú sebesség esetén van hatása, ilyenkor viszont erősen befolyásolja a pattanás utáni sebesség értékét. $1/\beta$ jelenti azt a sebességet, amelyre az ütközési együttható az e -ad részére csökken. A szimulációban különböző értékekre nézzük a mozgások diagrammait. Kisebb β nagyobb, nagyobb β kisebb j értéket eredményez, tehát, ha a labda elrepül, akkor nagyobb β megválasztása szükséges. $j_0 = 1$ ellenére megtörténhet, hogy a labda megáll, ez a vizsgált, $k = 0.75$ esetben tapasztalat szerint $\beta \geq 0.1$ -től kezdve következhet be. A labda elrepülése $\beta \leq 0.05$ -re szokott megtörténni, így $0.05 < \beta < 0.1$ tartományt vizsgálunk. Ilyenkor azt látjuk, hogy a labda szinte mindig eljut 10000 pattanásig, és struktúrált fázistérbeli mintázatot kapunk. A 28. ábrán egy $\beta = 0.08$ esetben előforduló mozgás diagrammait mutatjuk be. A sebesség-idő diagrammon 25. ábrán lévő diagrammhoz hasonlóan a sebességek folyamatos csökkenése látható hirtelen növekedésekkel megszakítva, de természetesen a csökkenés itt más ütemben (nagy sebességekre mindenképpen gyorsabban) történik. Az is látható, hogy a korábban is tárgyalt módon a v követi u csökkenését és növekedését. A fázistér ellenben egy új tulajdonságot mutat. Az eddigi szétszórtság mellett elkezdett vonalakba rendeződni, mely a fraktálok jellemzője, a fraktálszerű fázistér pedig a kaotikus mozgások jellemzője [3,4,7].



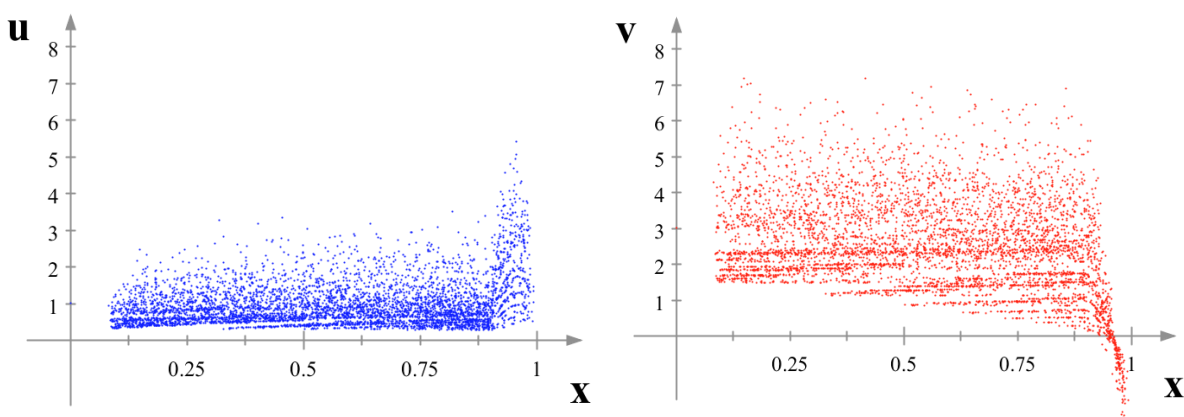
28. ábra: $k = 0.75$, $j_0 = 1$ és $\beta = 0.08$ ütközési együtthatójú lépcsőn a $x_0 = 0$ kezdőhelyről indított labda diagrammjai 2000 pattanásig. A mozgás hosszú élettartamú, mert 10000 pattanásig még követhető volt.

A 29. ábrán ábrázoltuk egy másik mozgást azonos paraméterekkel, de a labda más kezdőkoordinátájával. A sebesség-idő diagramm jellegében hasonló, és látható hogy a mozgások maguk különböznek. Ennek ellenére a fázistéren ugyanazt az ábrát látjuk, vagyis a különböző kezdeti feltétellel induló mozgások rövid átmeneti viselkedés után ugyanazt az alakzatot járják be. Ez az alakzat ezért attraktornak nevezhető, és mivel a mozgás rajta kaotikus, ezért fázistérbeli mintázatot kaotikus attraktornak nevezzük.



29. ábra: $k=0.75$, $j_0=1$ és $\beta=0.08$ ütközési együtthatójú lépcsőn a $x_0=0.5$ kezdőhelyről indított labda diagrammjai 2000 pattanásig. a 28. ábrától különböző a sebesség-idő diagram, de a fázistérbeli struktúrák megegyeznek.

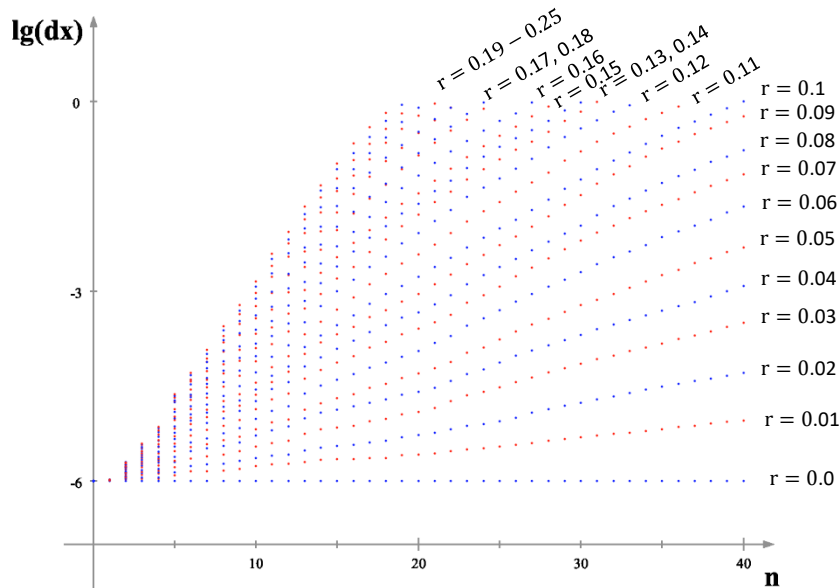
A 30. ábrán a 28-29. ábrán tárgyalt paraméterű mozgás $u-x$ és $v-x$ fázistérében megjelenő pontokat mutatjuk 5000 pattanásig, ami a kaotikus attraktor két különböző nézete. Az $u-x$ fázisterről idáig nem volt szó, de most ezt is ábrázoltuk, hiszen ez is a fázistér egy lehetséges másosulata, és ezen is észrevehető szálasodás. Mindkét nézetben kis sebességekre vízszinteshez közeli szálak láthatóak a lépcső lapos részén, ami a görbületen megtörik ($x > 0.9$), ahol u esetében szétszóródnak, v esetében kis helyre koncentrálnak az előforduló sebességértékeket mutató vonalak. Tisztán látszik, hogy a függőleges sebesség negatív értékeket is felvehet, de ez mindig csak a görbületen történhet meg.



30. ábra: $k=0.75$, $j_0=1$ és $\beta=0.08$ ütközési együtthatójú, $r=0.1$ sugarú görbülettel rendelkező lépcsőn bármilyen kezdőhelyről indított labda kaotikus attraktorát mutatja 5000 pattanásig. Mindkét grafikonon látható az értékek vonalakba rendeződése, mely a fraktálok, és így a kaotikus mozgások egy jellemzője (az átláthatóság kedvéért a korábbiaknál kisebb méretű pontokat használtunk).

Az érintőirányú ütközési együttható bevezetése után a mozgásokat mind az $r = 0.1$ esetben vizsgáltuk, de az a) fejezetben azt láttuk, hogy már a legkisebb sugár esetében megjelenik a Ljapunov-exponenshez hasonló mennyiség, mely két egymáshoz közel indított mozgás $\lg(dx) - n$ grafikonjára illeszthető egyenes meredeksége. Minél nagyobb a meredekség, annál gyorsabban távolodik két közel indított labda, így a mozgás annál nehezebben jelezhető előre.

Kisebb sugarú görbület jobban szór, de arra ritkábban pattan a labda, tehát felmerül a kérdés, hogy melyik hatás dominál, vagyis hogyan függ r -től a meredekség. A 31. ábrán ábrázoltuk különböző görbületi sugárra ugyanannak az 1000 véletlenszerű helyről induló labdához tartozó $\lg(dx) - n$ grafikon átlagát. Az ábráról látható, hogy a Ljapunov-exponens monoton nő a görbületi sugár növekedésével, a 0.025-0.5/ütközés tartományban.



31. ábra: $k = 0.75$, $j_0 = 1$ és $\beta = 0.08$ ütközési együtthatójú lépcsőn 1000 véletlenszerű helyről, ettől kis távolságra indított labdák átlagos távolsága az idő függvényében, $r = 0.0$, $r = 0.01$, $r = 0.02 \dots r = 0.25$ esetekben (szomszédos értékek különböző színnel jelölve). $r = 0.25$ fölött már nem lépcsőszerű az alak, így csak addig ábrázoltuk. A grafikon minden egyes esetben egy egyenes alakját veszi fel, méghozzá nagyobb r esetén mindig nagyobb meredekségűt.

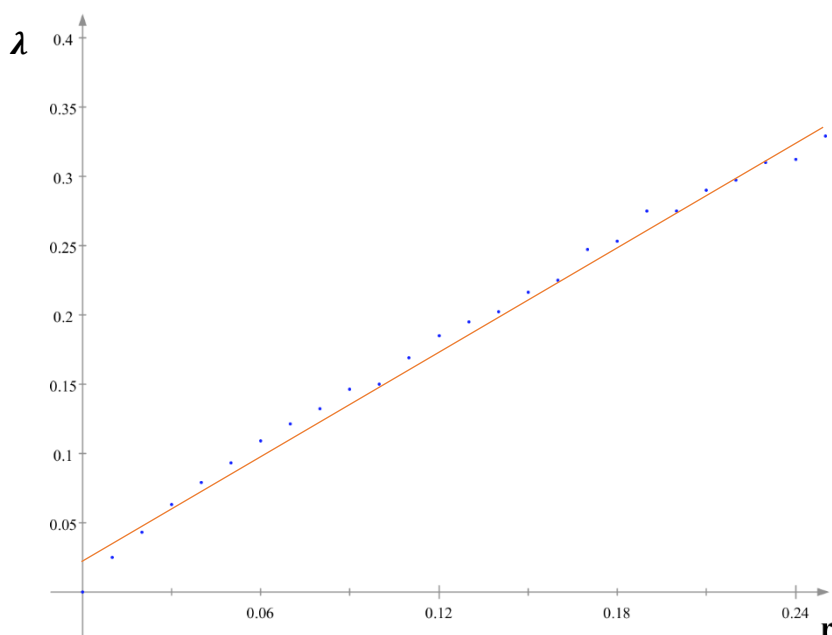
A 32. ábrán a Ljapunov exponens növekedését vizsgáljuk, és kiderül, hogy az lineárisan növekszik a görbület függvényében. Ennek az egyenesnek a meredeksége 1.3.

Megjegyezzük, hogy bevezethető a normálirányú ütközési együttható sebességfüggését is, pl. a (30)-hoz hasonló

$$k(v) = k_0 e^{-\gamma|v|} \quad (31)$$

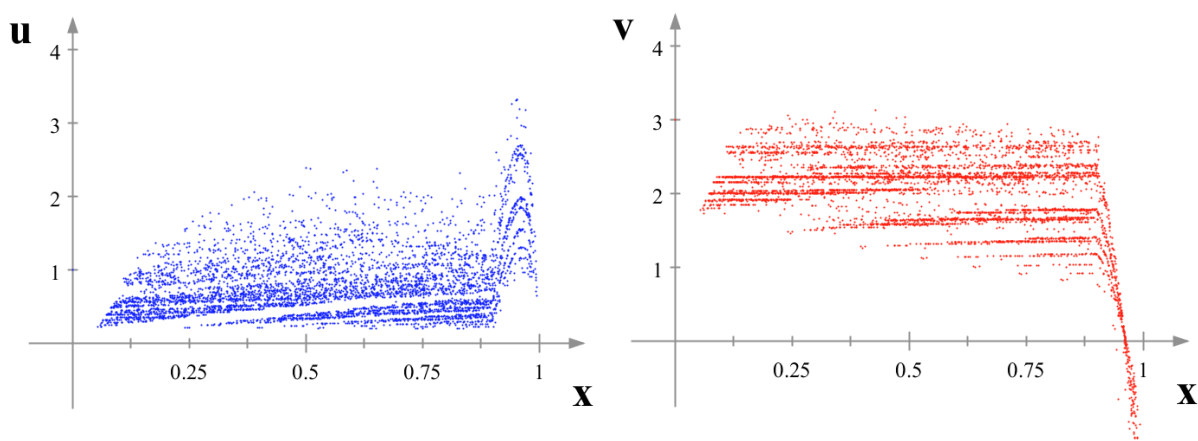
alakban, ahol k_0 és γ pozitív paraméterek, v pedig a labda ütközés előtti normálirányú sebessége. A (30)-tól eltérően most megjelenik egy abszolútérték jel a sebesség körül, hiszen u -val ellentétben v mindig negatív érték (hiszen a labda az ütközés előtti pillanatban lefelé

halad). j_0 , k_0 , β és γ mind külön megválasztható paraméterek, de az egyszerűség kedvéért a $j_0 = k_0 = 1$ és a $\beta = \gamma$ feltételeknél maradunk. Ez azért előnyös, mert így egyetlen



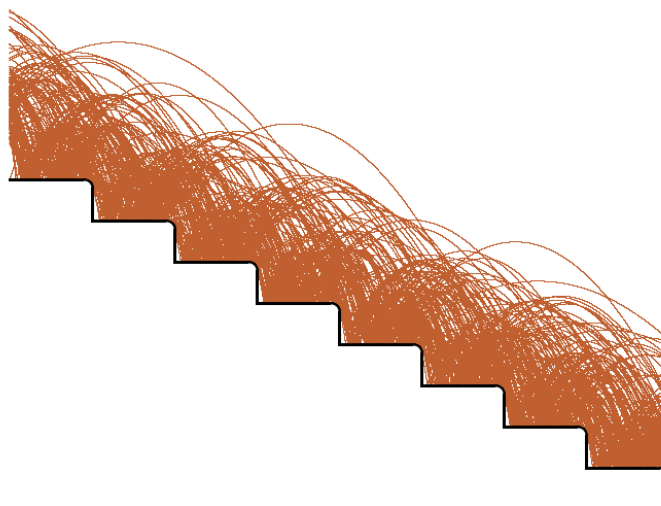
32. ábra: A 31. ábrán az egyes görbékre illeszthető egyenes λ meredeksége, a Ljapunov-exponens a görbület sugarának függvényében. Látható, hogy a meredekség lineárisan nő a görbülettel. Az így kapott egyenes meredeksége 1.3.

paraméterrel (β) megadható mindkét sebességfüggő ütközési együttható. A tesztelés során azt láttuk, hogy β a korábbinál kóval nagyobb, $0.03 < \beta < 0.15$ tartományban mindig hosszú élettartamú mozgást ad. A $\beta = 0.1$ esetben fellépő mozgás kaotikus attraktora a 33. ábrán látható. A grafikon szálasodása minden eddigénél tisztábban látható.



33. ábra: $k_0 = j_0 = 1$ és $\beta = 0.1$ esetben a kaotikus attraktor az első 5000 pattanásra.

Ennek az ábrának az adataival újfent ábrázoltuk a pálya képét az első 1000 pattanásra, ez a 34. ábrán látható. Itt nem volt szükség az ábra tetejének levágására, mint a 27. ábrán, mert sosem pattanta a labda négy lépcsőfoknál magasabbra. A mozgás során a labda a lépcső közelében teljesen befesti a képet.



34. ábra: A 33. ábra adataival elindított labda pályájának a képe az első 1000 pattanás során.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (30) és (31)-ben mutatott sebességfüggésen kívül sok más függés is lehetséges, pl. a sebesség abszolútértékétől való függés, s más függvényalak, pl. szigmoid is, de ezek vizsgálata már meghaladja a dolgozat kereteit.

9. Összefoglalás

A dolgozatban arra a kérdésre kerestük a választ, hogy kaotikus-e egy kisméretű (pontszerű) labda mozgása lekerekített sarkú fokokból álló lépcsőn.

A modell feltételezése szerint az ütközések között a mozgás ferde hajítás, a lényeges esemény - az irányváltás és a disszipáció - az ütközésekkor történik. Ezért célszerűnek bizonyult az ütközések sorozatát követni (a visszapattanás utáni sebességekkel), diszkért (n) idejű eseménysorozatként.

Már a legkisebb lekerekítés is lényegi változásra vezet a szögletes lépcsőn történő mozgáshoz [2] képest. A görbületen szert tett vízszintes irányú sebességnövekedés miatt egyre nagyobb ugrások történhetnek, egyre nagyobb sebességekkel, s így a mozgás kivezethet a modell értelmezési tartományából, a légellenállást ugyanis végig elhanyagolhatónak tételeztük fel. Ezért egy bizonyos kritikus ugrási nagyság (100 lépcsőfok) meghaladása esetén értelmetlennek tekintettük a szimulálást, s leállítottuk. Így viszont erős időbeli megszorítást kaptunk, ami megnehezíti a mozgás kaotikusságának ellenőrzését (hiszen csak hosszú ideig tartó mozgás lehet szigorú értelemben kaotikus).

A hagyományos, merőleges sebességekre vonatkozó ütközési együttható mellett az idősor jelentősen eltér a szögletes lépcsőhöz tartozótól, de még sok szabályos vonást is mutat, a fázistérbeli pontok szétszóródnak, de még kevesen vannak. A legmeglepőbb változás a közeli pontok távolodási ütemében látszik, s rögtön közelítőleg exponenciálisnak bizonyul, szemben a szögletes lépcső semmi távolodást nem mutató esetével. Lényegi átlagképzésre azonban a kevés esetszám miatt nincs mód.

A modell módosításai az érintőleges sebességekre vonatkozó ütközési együttható (j) bevezetésével arra világítanak rá, hogy a görbületen történő pattanások rugalmas tulajdonságai eltérőek lehetnek a síklapon történőkéitől. A görbületen, majd a teljes lépcsőfokon is érvényes nagyobb energiavesztés figyelembevételével az ugrások valamelyest kisebbé váltak, de nem maradtak hosszan a kritikus ugrási nagyság alatt. Az érvényes mozgások hosszabbak lettek, s mindhárom vizsgált tulajdonság egyre jobban érvényesülőnek bizonyult. Igazán hosszú mozgásokhoz csak akkor jutottunk, amikor figyelembe vettük az ütközési együtthatók sebességkomponensektől való függését. Ekkor már a fázistérbeli fraktálszerkezet is tisztán megmutatkozott, s az exponenciális távolodás ütemének, a Ljapunov-exponensnek a görbületi sugártól való függését is meg tudtuk határozni.

Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a lekerekített szélű lépcsőkön pattogó labda mozgása modellünkben kaotikusnak bizonyult, s mivel a valóság ennél bonyolultabb (pörgés, rugalmas rezgés, légellenállás) s egy összetettebb rendszer általában még kaotikusabb, elfogadhatjuk, hogy a valódi labdák lépcsőn lefelé pattogása is kaotikus vonásokat mutató folyamat (persze azokat is véges ideig figyelhetjük csak).

10. Kitekintés

Kutatásunk során további kérdések is felmerültek, melyre a dolgozat keretében nem adtunk választ. Ezek megválaszolását a közeljövőben tervezzük

a) Különféle ütközési együtthatók vizsgálata

Az ütközési együttható helyfüggését csak egyetlen esetben vizsgáltuk meg, méghozzá az érintőleges ütközési együtthatóra, amikor a lapos részen 1, a görbületen más értéket kapott. Érdekes eredményt adhat, ha ugyanezt a normálirányú ütközési együtthatóra nézzük meg.

b) Más, a lépcsőt jellemző paraméterek

Az egyszerűség kedvéért a dolgozatban kizárólag az $m = 0.5$ és $H = 4$ paraméterű lépcsőkkel foglalkoztunk, de érdekes megnézni meredek, és kevésbé meredek lépcsőket, illetve a lépcsőhöz és kezdősebességhez képest nagyobb, és kisebb gravitációs gyorsulást. Emellett csak az $r = 0.1$ esetet vizsgáltuk áthatóan, az $r > 0.25$ esetekkel pedig egyáltalán nem foglalkoztunk. Különösen ígéretesnek tűnik a nagyon kicsi, $r \leq 0.01$ görbülő eset vizsgálata, vagyis a kaosz megjelenésnek a módja. Ugyan ilyenkor már nem mondható lépcsőalakúnak a kapott $y_0(x)$ görbe, de a mozgás ettől még lehet izgalmas.

c) Attraktor elérésének és az attraktoron való mozgás statisztikájának vizsgálata

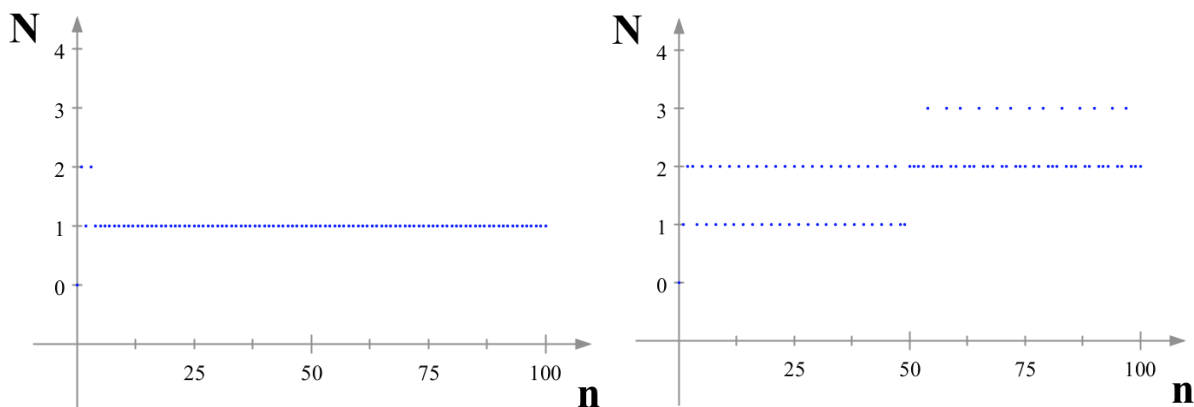
Az attraktor tulajdonságairól alig beszéltünk, pedig annak rengetek jellemzőjét fel lehetne deríteni. Figyelemre méltó lehet például, hogy a kezdőfeltételek függvényében milyen gyorsan éri el a mozgás az attraktort, vagy hogy mi történik pontosan, amikor már elérte. Szintén fontos lehet, hogy a hosszú ideig tartó mozgások milyen valószínűséggel érintik az attraktor egyes pontjait.

Irodalomjegyzék:

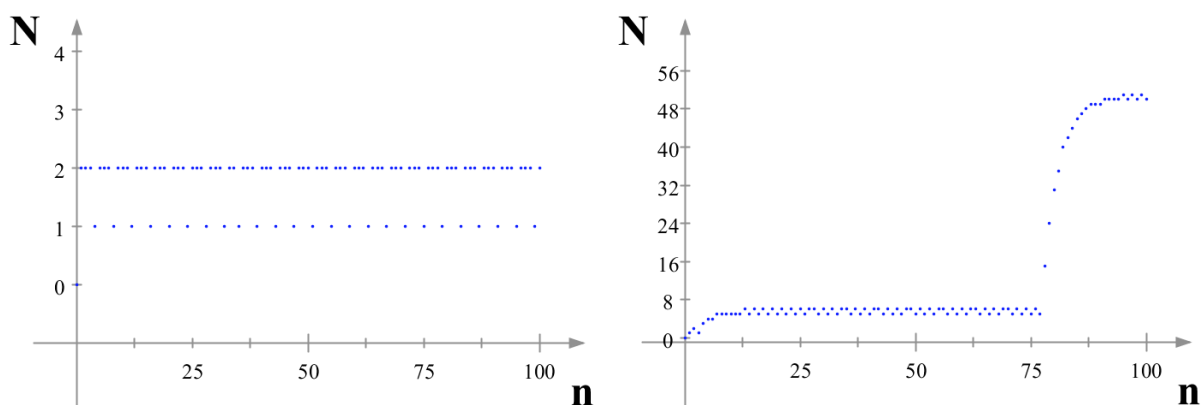
- [1] A. Jaros, A. Nussbaumer, H. Kunze; Basiswissen Physik-compact. Öbvht, Wien, 1999
- [2] Gruiz Márton, Meszéna Tamás, Tél Tamás; Kaotikus, vagy csak összetett? – Labdák pattogása lépcsőn. Fizikai Szemle, Budapest, 2016
- [3] Edward Ott; Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1993
- [4] Tél Tamás, Gruiz Márton; Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [5] Ben Fry, Casey Reas; Processing, Weblap: <https://processing.org/>
- [6] Peter Lager; Jasmine, Weblap: <http://www.lagers.org.uk/jasmine/>
- [7] Edyta Patrzalek; Fractals: Useful Beauty (General Introduction to Fractal Geometry, Elérés: <http://www.fractal.org/Bewustzijn-Besturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm>
- [8] Tél Tamás; What is chaos?, 2019, Elérés: <http://www.theorphys.elte.hu/fiztan/chaos/>

Függelék**1) Az $N - n$ függés**

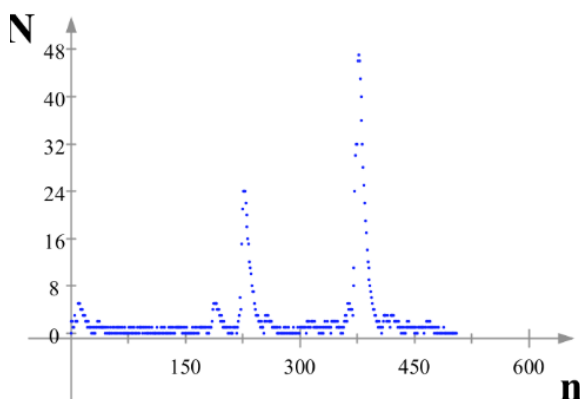
A mozgás $N - n$ függése azt adja meg, hogy az egyes pattanások során hány lépcsőfokot ugrik át a labda, ami például a sebesség nagyságával, vagy a két ütközés közötti ferde hajítással leírható mozgás során elért legnagyobb magassággal korrelál.



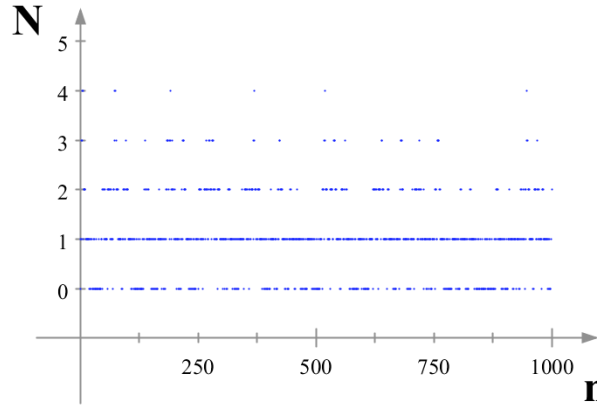
35. ábra: A $k=0.6$ -ra fellépő mozgás $N - n$ függvénye $r=0$ (bal oldal) és $r=0.01$ (jobb oldal) esetben, a 12., illetve a 13. ábra adataival.



36. ábra: A $k=0.75$ -re fellépő mozgás $N - n$ függvénye $r=0$ (bal oldal) és $r=0.01$ (jobb oldal) esetben, a 19., illetve a 20. ábra felső sorának adataival.



37. ábra: A $k=0.75$ -re fellépő mozgás $N - n$ függvénye a j érintőirányú ütközési együttható hozzáadásával, az $r=0.1$ esetben, a 24. ábra adataival.



38. ábra: Sebességfüggő ütközési együtthatók esetén fellépő mozgás $N - n$ függvénye az $r = 0.1$ -ra, a 33. ábra adataival.

2) Energiaveszteség

Definiáljuk a h_n mélység nevű változót, mely az n . lépcsőfok magassága a 0.-hoz képest. Ennek m -ed része megmondja, hogy a 0. pattanás és az n . pattanás között összesen hány lépcsőfokot ugrott át. A korábbi változókból h_n számolható:

$$h_n = m \sum_{i=0}^{n-1} N_i. \quad (32)$$

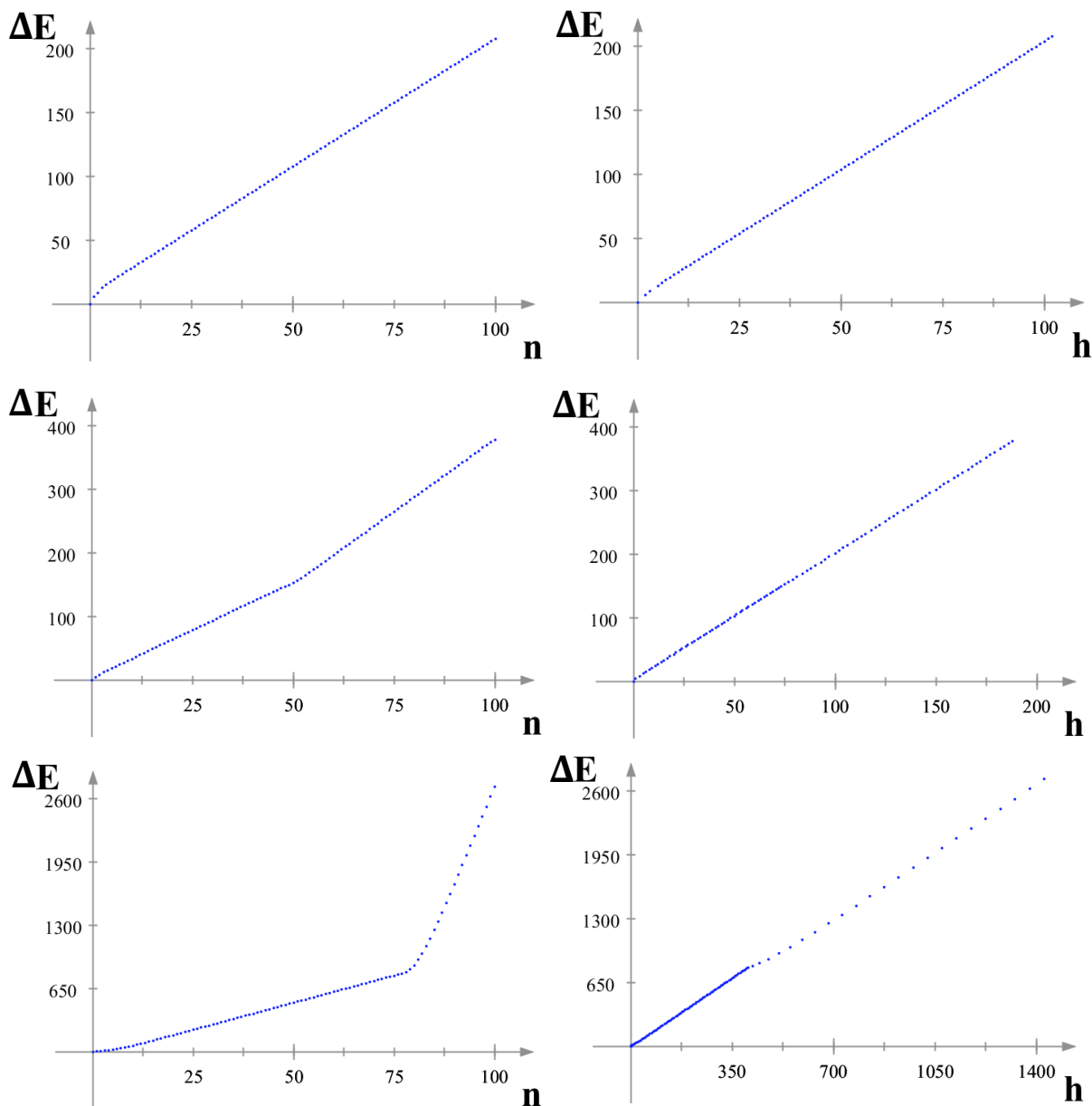
Ebből az n . ütközés után a dimenziótlan energiája (tömeget egységnyiinek tekintve, és a helyzeti energia nullszintjét a 0. lépcsőfok lapjának egyenesén megválasztva):

$$E_n = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - H(h_n - y_n), \quad y_n \leq 0.$$

Érdekes az energiagrafikokat úgy ábrázolni, hogy a kezdőértéktől függetlenül áthaladjon az origón, így szembeűnővé téve a különböző kezdőértékekkel felrajzolt grafikonok hasonlóságát, úgyhogy ehelyett az energiát a 0. pattanás energiájához viszonyítjuk. A negatív értéket felvevő összenergia helyett inkább a kezdeti állapot óta történő pozitív előjelű energiaveszteséget nézzük. Tehát az energiaveszteség ΔE_n értéke (definíció szerint $u_0 = 1$ és $h_0 = 0$):

$$\Delta E_n = \frac{1 + v_0^2}{2} + Hy_0 - \left(\frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - H(h_n - y_n) \right). \quad (33)$$

Az energia változásának bemutatására megrajzoltuk a $r = 0$ és $r = 0.01$ esetben vizsgált pattogások energia-idő és energia-mélység diagrammját a 39. ábrán. Első ránézésre az látszik, hogy $r = 0$ -ra, az első néhány értéket leszámítva mindkét grafikon lineáris növekedést mutat. $r = 0.01$ -re viszont az energia- idő diagrammon nagy változást látunk. A görbületre pattanások után nő a meredeksége. Ennek oka az, hogy ugyan nagyobb sebessége lesz, de ennél sokkal nagyobb hatása van annak, hogy emiatt több lépcsőfokot ugrik át egyszerre, így nő az egy ütközésre jutó energiaveszteség. Ennek ellenére az energia-mélység függvény megtartotta



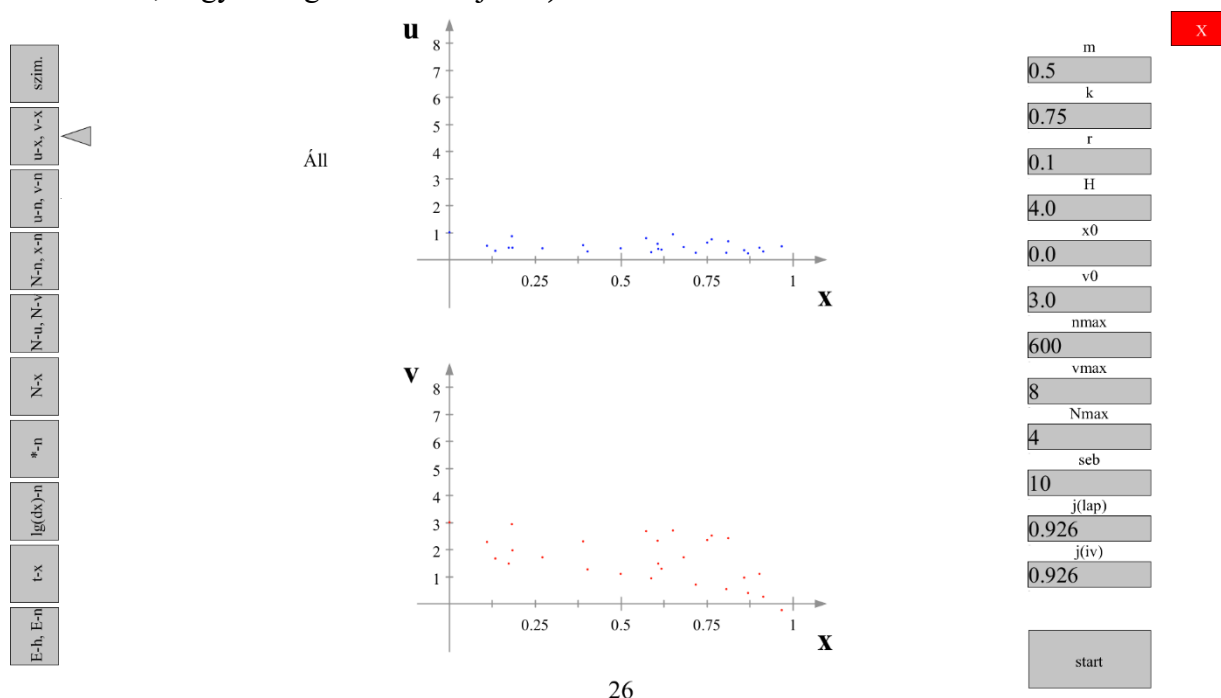
39. ábra: Az energia idő és mélység függése $k = 0.6$ -ra az $r = 0$ esetben (felül) és az $r = 0.01$ esetben (középen), illetve $k = 0.75$ -re $r = 0.01$ esetben (alul). Előbbi esetben néhány pattanást követően mindkét függvény egy egyenes alakját veszi fel, melyen egyenletes sűrűségben vannak pontok. Utóbbi két esetben (melyek lényegesen csak a meredekségükben különböznek) a görbületre pattanások után az $\Delta E - n$ függvényen az egyenes megtörik, és a meredekség nő, míg az $\Delta E - h$ függvény az egyenes alak, és a meredekség is megmarad, de az egyenesen kijelölt pontok sűrűsége csökken.

lineáris alakját, és a meredekségét is. Annyi változott, hogy mivel egyszerre több lépcsőfokot ugrik át a labda, ezért kevesebb lépcsőre pattan le, így ritkábban rajzolhatunk fel pontokat. Az, hogy a sebességnövekedés ellenére a függvény linearitása és meredeksége nem változik, bizonyítja, hogy (33)-ban h_n dominál, leginkább ez határozza meg a függvény alakulását.

Ha jobban megvizsgáljuk a diagrammokat, láthatjuk, hogy közvetlenül a görbültre pattanások után mind az $\Delta E - n$, mind az $\Delta E - h$ diagrammon megtörik egy kicsit a linearitás, és csak néhány pattanás után, amikor a 13. ábrán v_n értéke is megnövekedett, és a labda elérte az új standard mozgási energiáját áll be $\Delta E - n$ diagramm esetében az új meredekségű, illetve $\Delta E - h$ diagramm esetében a régi meredekségű, de más pontsűrűségű egyenes.

3) A szimuláció és felhasználói felülete

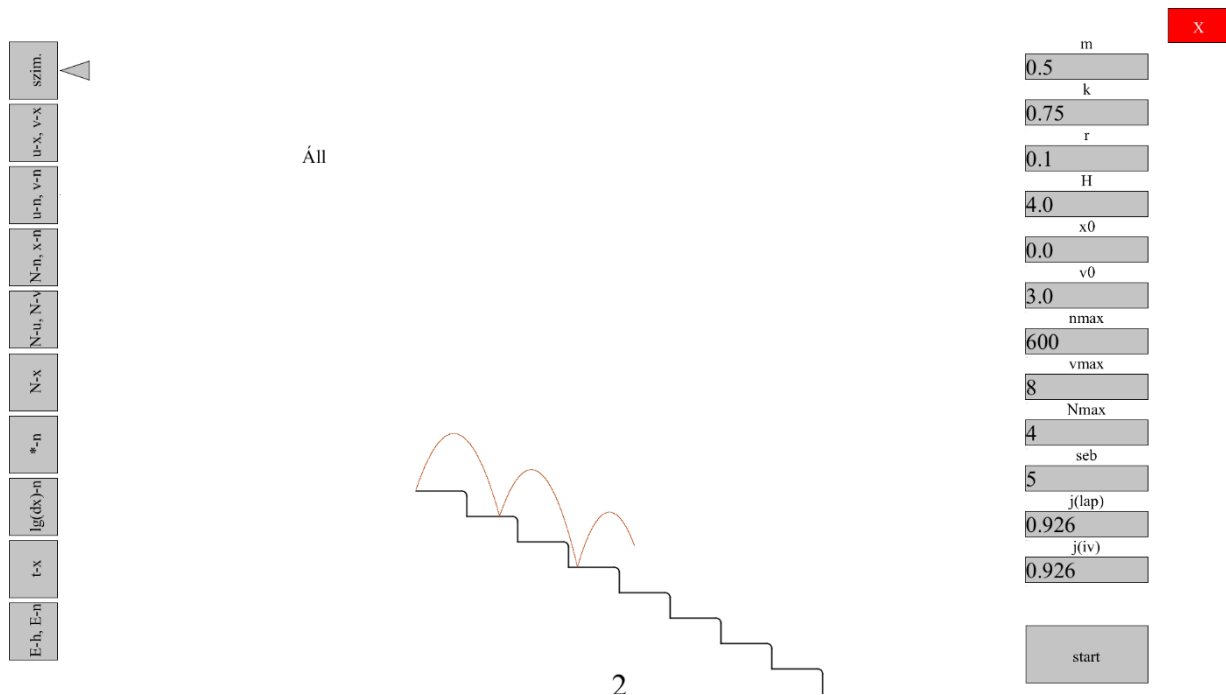
A szimulációhoz felhasználói felület is tartozik, melyben meg lehet nézni bármely, a szövegben mutatott ábrát. A 40. ábrán az egyik diagramm példáján mutatjuk meg a szimuláció felületét. A jobb oldalon beállíthatók az m , r , H , k , és j paraméterek, utóbbi külön a lapra és az ívre, ha a 8. fejezet B) részének I) szakaszában található ábrákat szeretnénk rekreálni. Emellett beállíthatók a labda x_0 és v_0 kezdőértékei, a szimuláció hosszának $nmax$ felsőkorlátja, és a diagrammokon az egyes értékek $vmax$ és $Nmax$ maximuma. A sebesség szót rövidítő seb nevű beállításról később beszélünk. A beállítások után a start gombbal indul a szimuláció, ami képernyő középső harmadában jelenik meg. Alul a program tudatja velünk a szimuláció jelenlegi állását, vagyis az eddig megtörtént pattanások számát (ezt persze levettük a dolgozatba rakott ábrákról). Bal oldalon állíthatjuk, hogy a mozgás milyen diagrammjára vagyunk kíváncsiak (van néhány olyan is, melyet megcsináltunk ugyan, de nem tartottuk elég érdekesnek, hogy a dolgozatba kerüljenek).



26

40. ábra: A szimuláció felhasználói felülete, az „ $u - x$, $v - x$ ” fület megnyitva

A bal oldalon látható szim. szócskára kattintva a labda pályájának képét láthatjuk. Ennek kétféle módja van, egyrészt tudja ütközésekkor a jelenlegi és az előző ütközés közti parabolát egyszerre kirajzolni (ezt használtuk a dolgozat ábráihoz), másrészt a szemléletesség kedvéért tudja a labda pályáját folyamatosan, haladása közben rajzolni, ezt a 41. ábrán mutatjuk. Utóbbinak a sebességét állítja a jobb oldalon lévő seb nevű számérték. E két funkció közötti váltás, és még két másik fontos opció (az, hogy az $lg(dx) - n$ függvénynél valamennyi mozgás átlagát jelezze, és az, hogy az ütközési együtthatók valamilyen β és γ értékekkel sebességfüggők



41. ábra: A labda pályáját folyamatosan kirajzoló ábra

legyenek) csak a programkódban található, a felhasználói felületen nem elérhető. Ezeket a közeljövőben belecépítem a felhasználói felületbe, és hamarosan nyilvánossá teszem a szimulációt.